

Kansrekening en statistiek
wi2105IN—deel I
1 november 2010, 14.00–17.00 uur

Bij dit examen is het gebruik van een (evt. grafische) rekenmachine toegestaan. Tevens krijgt u een formuleblad uitgereikt—na afloop inleveren alstublieft.

Meerkeuzevragen

Toelichting: In het algemeen zijn niet altijd vijf van de zes alternatieven 100% fout, het juiste antwoord is het meest volledige antwoord. Maak op het bijgeleverde antwoordformulier het hokje behorende bij het door u gekozen alternatief zwart of blauw. Doorstrepen van een fout antwoord heeft geen zin: u moet het òf uitgummen, òf verwijderen met correctievloeistof òf een nieuw formulier invullen. Vergeet niet uw studienummer in te vullen èn aan te strepen.

1. Een vaas bevat 3 rode, 5 gele en 4 bruine ballen. Je pakt 2 ballen tegelijkertijd uit de vaas. De kans dat je 2 rode of 2 gele ballen pakt is gelijk aan:
a. $\frac{26}{144}$ b. $\frac{1}{4}$ c. $\frac{36}{132}$ d. $\frac{26}{132}$ e. $\frac{120}{132}$ f. $\frac{34}{144}$
2. Stel dat 5 kaarten worden gedeeld uit een pak van 52 kaarten. Gegeven is dat de eerste kaart een heer is. Gegeven dit feit, wat is de kans dat er nog ten minste één heer zit tussen de overige 4 kaarten (afgerond op 2 decimalen)?
a. 0.22 b. 0.28 c. 0.08 d. 0.72 e. 0.10 f. 0.18
3. Gegeven een aankomstproces van klanten bij een loket dat gemodelleerd wordt met een 1-dimensionaal Poisson proces. De intensiteit is 2 (dat wil zeggen: in een interval ter lengte Δ , verwachten we 2Δ aankomsten). Wat is de kans dat de tijd tot de eerste aankomst meer dan 2 is?
a. e^{-1} b. $2e^{-1}$ c. $2e^{-2}$ d. e^{-2} e. e^{-4} f. $e^{-2}/2$
4. Stel dat de random variabele X dichtheid f heeft, met

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & x \in [0, 1] \\ 0 & x \notin [0, 1] \end{cases}.$$

De kans $P(0 \leq X < 0.5)$ is gelijk aan

- a. $\frac{1}{12}$ b. $\frac{1}{24}$ c. $\frac{1}{2}$ d. $\frac{3}{8}$ e. $\frac{1}{8}$ f. $\frac{1}{4}$
5. De kansgenererende functie van de stochast X , gegeven door $P(X = k/10) = \frac{1}{10}$, voor $k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ wordt gegeven door
a. $\frac{1}{10} \frac{1-s}{1-s^{1/10}}$ b. $\frac{1}{10} \frac{1-s}{1-s^{10}}$ c. $\frac{1}{10} \frac{1-s}{(1-s)^{1/10}}$
d. $\frac{1}{10} \frac{1-s^{9/10}}{1-s^{1/10}}$ e. $10 \frac{1-s^{9/10}}{1-s^{1/10}}$ f. $\frac{1}{10} \frac{1}{1-s^{1/10}}$
 6. Gebruik Chebyshev's ongelijkheid om een bovengrens vast te stellen voor de kans

$$P(|X - E[X]| > 1)$$

als je weet dat de standaarddeviatie van X gelijk is aan 0.2.

- a. 0.42 b. 0.08 c. 0.01 d. 0.45 e. 1 f. 0.04

7. Laat Φ een uniforme verdeling hebben op het interval $[0, \pi]$, dan is de verwachting van $\sin(\Phi)$ gelijk aan
 a. 1 b. -1 c. $1/\pi$ d. $-1/\pi$ e. $2/\pi$ f. $-2/\pi$
8. Iemand test positief op een ziekte. Het is bekend dat men 1% kans heeft om de ziekte te krijgen en dat de test niet perfect is, d.w.z. 98% van de zieke mensen zal positief testen en 95% van de gezonde mensen zal negatief testen. Dan is de kans dat iemand de ziekte heeft, gegeven dat hij positief test, gelijk aan
 a. 0.8793 b. 0.0098 c. 0.0103 d. 0.2193 e. 0.0573 f. 0.1650
9. Gegeven is de verdelingsfunctie van een discrete stochastische variabels X :

$$F(a) = \begin{cases} 0 & \text{voor } a < 0 \\ \frac{1}{3} & \text{voor } 0 \leq a < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{voor } \frac{1}{2} \leq a < \frac{3}{4} \\ 1 & \text{voor } a \geq \frac{3}{4}. \end{cases}$$

De kansverdeling van X wordt gegeven door

a.	<table> <tr> <td>a</td><td>0</td><td>1/2</td><td>3/4</td></tr> <tr> <td>$P(X = a)$</td><td>1/3</td><td>1/6</td><td>1/2</td></tr> </table>	a	0	1/2	3/4	$P(X = a)$	1/3	1/6	1/2	b.	<table> <tr> <td>a</td><td>1/2</td><td>1/3</td><td>1</td></tr> <tr> <td>$P(X = a)$</td><td>1/4</td><td>1/2</td><td>1/4</td></tr> </table>	a	1/2	1/3	1	$P(X = a)$	1/4	1/2	1/4
a	0	1/2	3/4																
$P(X = a)$	1/3	1/6	1/2																
a	1/2	1/3	1																
$P(X = a)$	1/4	1/2	1/4																
c.	<table> <tr> <td>a</td><td>0</td><td>1/2</td><td>3/4</td></tr> <tr> <td>$P(X = a)$</td><td>1/3</td><td>1/2</td><td>1/6</td></tr> </table>	a	0	1/2	3/4	$P(X = a)$	1/3	1/2	1/6	d.	<table> <tr> <td>a</td><td>1/2</td><td>1/3</td><td>1</td></tr> <tr> <td>$P(X = a)$</td><td>1/2</td><td>1/4</td><td>1/4</td></tr> </table>	a	1/2	1/3	1	$P(X = a)$	1/2	1/4	1/4
a	0	1/2	3/4																
$P(X = a)$	1/3	1/2	1/6																
a	1/2	1/3	1																
$P(X = a)$	1/2	1/4	1/4																
e.	<table> <tr> <td>a</td><td>0</td><td>1/2</td><td>3/4</td></tr> <tr> <td>$P(X = a)$</td><td>1/2</td><td>1/6</td><td>1/3</td></tr> </table>	a	0	1/2	3/4	$P(X = a)$	1/2	1/6	1/3	f.	<table> <tr> <td>a</td><td>1/2</td><td>1/3</td><td>1</td></tr> <tr> <td>$P(X = a)$</td><td>1/8</td><td>1/8</td><td>3/4</td></tr> </table>	a	1/2	1/3	1	$P(X = a)$	1/8	1/8	3/4
a	0	1/2	3/4																
$P(X = a)$	1/2	1/6	1/3																
a	1/2	1/3	1																
$P(X = a)$	1/8	1/8	3/4																

10. De mediaan van een $Par(1)$ verdeling is gelijk aan
 a. -3 b. 0 c. $\frac{1}{2}$ d. 1 e. 2 f. 4
11. Gegeven is de onderstaande gezamenlijke kansverdeling van twee discrete stochastische variabelen X en Y :

b	a			$P(Y = b)$
	0	1	2	
-1	1/6	1/6	1/6	1/2
1	0	1/2	0	1/2
$P(X = a)$	1/6	2/3	1/6	1

Dan geldt

- a. $E[XY] = 0$ en X, Y zijn onafhankelijk
 b. $E[XY] = 1$ en X, Y zijn onafhankelijk
 c. $E[XY] = -1$ en X, Y zijn onafhankelijk
 d. $E[XY] = 0$ en X, Y zijn afhankelijk
 e. $E[XY] = 1$ en X, Y zijn afhankelijk
 f. $E[XY] = -1$ en X, Y zijn afhankelijk

- 12.** Gegeven een continue stochast X die waarden aanneemt tussen 0 en 2. De verdelingsfunctie F is gelijk aan $F(x) = \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{24}$. Laat U een uniform verdeelde random variable zijn op $[0, 1]$. Met behulp van U kunnen we X simuleren via de formule

a. $X = \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 24U}}$

b. $X = \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 12U}}$

c. $\frac{U+U^3}{6}$

d. $-1 + \sqrt{1 + 24U}$

e. $U^2/12 + U^4/24$

f. $-1 - \sqrt{1 + 12U}$

Open vragen

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands.

- 1.** Gegeven onafhankelijke stochastische variabelen U en V die ieder uniform verdeeld zijn op het interval $(0, 1)$. Laat $\alpha \in \mathbb{R}$. Definieer

$$X = U + \alpha V$$

$$Y = 2V$$

- a. Bereken $\text{Var}(X)$.
 - b. Bereken $\text{Cov}(X, Y)$.
 - c. Voor welke waarde(n) van α zijn X en Y onafhankelijk? Geef een duidelijke toelichting!
- 2.** Op een verjaardagsfeestje verdelen we 35 snoepjes (van hetzelfde type) onder 10 kinderen.
- a. Bereken het aantal manieren waarop we de snoepjes onder de kinderen kunnen verdelen.
 - b. Bereken het aantal manieren waarop we de snoepjes onder de kinderen kunnen verdelen, onder de restrictie dat ieder kind ten minste 1 snoepje krijgt, en de jarige ten minste 3 snoepjes.

De formule

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k, \quad n \in \{1, 2, \dots\}, \quad |x| < 1$$

kan van pas komen.

- 3.** Gegeven de stochastische vector (X, Y) met simultane kansdichtheid

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2y) & \text{als } x \in [0, 2] \text{ en } y \in [0, 1] \\ 0 & \text{voor alle andere waarden van } x \text{ en } y \end{cases}.$$

Bereken de marginale dichtheid van X , noteer deze met f .

4. Gegeven zijn 3 onafhankelijke stochastische variabelen X_1, X_2 en X_3 , die ieder uniform op het interval $[0, 2]$ verdeeld zijn. Definieer de stochastische variabele Y door

$$Y = \max(X_1, X_2, X_3).$$

Bereken de (cumulatieve) verdelingsfunctie $F(y) = P(Y \leq y)$. Beschouw apart de gevallen $y < 0$, $y \in [0, 2]$ en $y > 2$.

Normering: Eindcijfer is

$$(3 * \text{resultaat multiple choice} + 2 * \text{resultaat open vragen}) / 5.$$

Voor de open vragen geldt:

1a: 1 punt

1b: 2 punten

1c: 1 punt

2a: 2 punten

2b: 2 punten

3: 2 punten

4: 2 punten

Antwoorden multiple choice:

1 d.

$$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{12}{2}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{3}{12} \frac{2}{11} + \frac{5}{12} \frac{4}{11} = \frac{26}{132}$$

2 a. De kans op tenminste 1 heer is 1 minus de kans op geen heer. We moeten dus uitrekenen

$$1 - P(\text{geen heer tussen de 4 kaarten} \mid \text{eerste kaart is een heer}).$$

Deze laatste kans is gelijk aan $1 - \frac{48}{51} \frac{47}{50} \frac{46}{49} \frac{45}{48} \approx 0.22$.

3 e. Tijd tot de eerste aankomst is exponentieel verdeeld met parameter 2. De gevraagde kans is dus gelijk aan $e^{-2 \cdot 2} = e^{-4}$.

4 e.

$$Uit \int f(x) dx = c/3 = 1,$$

volgt dat $c = 3$. De gevraagde kans is gelijk aan

$$3 \int_0^{1/2} x^2 dx = 3[x^3/3]_0^{1/2} = 1/8.$$

5 a.

$$\sum_{k=0}^9 s^{k/10} \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \sum_{k=0}^9 [s^{1/10}]^k = \frac{1}{10} \frac{1-s}{1-s^{1/10}}$$

6 f. De bovengrens is $\text{Var}(X)/1^2$ wat dus gelijk is aan 0.04.

7 e.

$$E[\Phi] = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{1}{\pi} [-\cos x]_0^\pi = \frac{2}{\pi}.$$

8 f. Zie huiswerk opgave 3.16. Schrijf D voor de gebeurtenis "men heeft de ziekte", zodat $P(D) = 0.01$ en T voor de gebeurtenis "de test is positief", zodat $P(T \mid D) = 0.98$ en $P(T^c \mid D^c) = 0.95$. Volgens de regel van Bayes is

$$P(D \mid T) = \frac{P(T \mid D)P(D)}{P(T \mid D)P(D) + P(T \mid D^c)P(D^c)} = \frac{0.98 \times 0.01}{0.98 \times 0.01 + 0.05 \times (1 - 0.01)} = 0.165.$$

9 a. Zie huiswerk opgave 4.3. Maak eventueel een schets van de grafiek van F . Uit de beschrijving van F is af te lezen dat F sprongen maakt in 0 , $\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{4}$, met sprong grootte, respectievelijk $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ en $\frac{1}{2}$. Dit betekent dat X als mogelijke waarden heeft 0 , $\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{4}$, met kansen $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ en $\frac{1}{2}$:

a	0	$1/2$	$3/4$
$P(X = a)$	$1/3$	$1/6$	$1/2$

10 e. Zie huiswerk opgave 5.12. De verdelingsfunctie van de $Par(1)$ is $F(x) = 1 - x^{-1}$. Om de mediaan te vinden moeten we oplossen

$$F(x) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$$

11 d. Zie huiswerk opgave 10.2. We hebben dat

$$E[XY] = \frac{1}{6} \times 1 \times (-1) + \frac{1}{6} \times 2 \times (-1) + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = 0.$$

Verder zijn X en Y afhankelijk, omdat

$$P(X = 0, Y = 1) = 0 \neq \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = P(X = 0) \times P(Y = 1).$$

12 a. Oplossen van $U = F(X)$ geeft de vergelijking

$$\frac{1}{2}z^2 + z - 12U = 0, \quad \text{waarbij } z = X^2.$$

We weten dat $X \in [0, 2]$, dus $z = -1 + \sqrt{1 + 24U}$. X is dus de wortel hieruit.

Antwoorden open vragen:

1 a. Omdat $\text{Var}(U) = \text{Var}(V) = \frac{1}{12}$ geldt $\text{Var}(X) = \frac{1}{12}(1 + \alpha^2)$.

b. Omdat U en V onafhankelijk zijn, geldt $\text{Cov}(U, V) = 0$. Dit impliceert

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(U + \alpha V, 2V) = 2\text{Cov}(U, V) + 2\alpha\text{Cov}(V, V) = 0 + 2\alpha\text{Var}(V) = \alpha/6.$$

c. X en Y zijn alleen ongecorrleerd als $\alpha = 0$. Dit is dus de enige mogelijkheid. Dat X en Y voor $\alpha = 0$ ook daadwerkelijk onafhankelijk zijn, volgt uit het feit dat voor $\alpha = 0$ geldt $X = U$ en $Y = 2V$ én dat U en V onafhankelijk zijn.

2 a. Dit is de coëfficiënt van x^{35} van het polynoom

$$(x^0 + x^1 + x^2 + \dots)^{10}$$

Dit product is gelijk aan

$$\frac{1}{(1-x)^{10}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{9+k}{k} x^k.$$

Neem $k = 35$, dan is het aantal manieren dus gelijk aan $\binom{44}{35}$.

b. Nu zoeken we de coëfficiënt van x^{35} van het polynoom

$$(x^1 + x^2 + x^3 + \dots)^9 (x^3 + x^4 + \dots).$$

Dit polynoom is gelijk aan

$$x^{12}(x^0 + x^1 + x^2 + \dots)^{10} = x^{12} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{9+k}{k} x^k.$$

Neem nu $k = 23$, dan is het aantal manieren dus $\binom{32}{23}$.

3 Voor $x \in [0, 2]$,

$$f_X(x) = \int f_{(X,Y)}(x,y)dy = \int_0^1 \frac{1}{4}(x+2y)dy = \left[\frac{1}{4}(xy+y^2) \right]_0^1 = \frac{1}{4}(x+1).$$

Buiten $[0, 2]$ is de dichtheid gelijk aan nul.

4 Het is eenvoudig in te zien dat $F(y) = 0$ als $y < 0$ en $F(y) = 1$ als $y > 2$. Als $y \in [0, 2]$, dan geldt

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(\max(X_1, X_2, X_3) \leq y) = P(X_1 \leq y, X_2 \leq y, X_3 \leq y) \\ &= P(X_1 \leq y) P(X_2 \leq y) P(X_3 \leq y) = (y/2)^3 = y^3/8. \end{aligned}$$