Kansrekening en statistiek
wi2105IN–deel I
29 januari 2010, 14.00–17.00 uur

Bij dit examen is het gebruik van een (evt. grafische) rekenmachine toegestaan. Tevens krijgt u een formuleblad uitgereikt—na afloop inleveren alstublieft.

Meerkeuzevragen

Toelichting: In het algemeen zijn niet altijd vijf van de zes alternatieven 100% fout, het juiste antwoord is het meest volledige antwoord. Maak op het bijgeleverde antwoordformulier het hokje behorende bij het door u gekozen alternatief zwart of blauw. Doorstrepen van een fout antwoord heeft geen zin: u moet het òf uitgummen, òf verwijderen met correctievloeistof òf een nieuw formulier invullen. Vergeet niet uw studienummer in te vullen èn aan te strepen.

1. De gebeurtenissen A en B zijn onafhankelijk en bovendien is bekend dat $\mathrm{P}(A \mid B) = 1/2$ en $\mathrm{P}(B \mid A) = 1/3$. Bereken $\mathrm{P}(A \cup B)$.

a. 1/6 **b.** 1/3 **c.** 1/2 **d.** 2/3 **e.** 5/6 **f.** 1

2. Een systeem bestaat uit onderdelen A en B. De kans dat onderdeel A kapot gaat is 0.1. De kans dat onderdeel B kapot gaat is 0.2. Als B kapot gaat, dan is de kans dat A kapot gaat 0.4. Wat is de kans dat precies één van de 2 onderdelen kapot gaat?

a. 0.14 **b.** 0.08 **c.** 0.2 **d.** 0.44 **e.** 0.28 **f.** 0.22

3. Als X een exponentiële verdeling heeft met parameter 2, dan is de kansdichtheidsfunctie van $Y = 1 - 3X$ gelijk aan

a. $F(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 3e^{-2y} & y \geq 0 \end{cases}$ **b.** $F(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - 3e^{-2y} & y \geq 0 \end{cases}$

c. $F(y) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{3}e^{-2(1-y)} & y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$ **d.** $F(y) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{3}e^{-2(1-y)/3} & y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$

e. $F(y) = \begin{cases} 1 - e^{-2(1-y)/3} & y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$ **f.** $F(y) = \begin{cases} e^{-2(1-y)/3} & y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$

4. Bepaal de coëfficiënt van x^{48} in $(x^5 + x^6 + x^7 + \cdots)^6$.
Je mag gebruiken dat $(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$.

a. $\binom{23}{18}$ **b.** $\binom{18}{5}$ **c.** $\binom{48}{43}$ **d.** $\binom{48}{6}$ **e.** $\binom{42}{6}$ **f.** $\binom{23}{6}$

5. Beschouw de volgende beweringen voor stochasten X en Y.

A $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$ geldt alleen als X en Y onafhankelijk zijn.

B Als X en Y onafhankelijk zijn, dan geldt $\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]$.

Welke van deze beweringen zijn waar?

a. alleen A **b.** alleen B **c.** beide **d.** geen

6. Laat $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ een rij van onafhankelijke, identiek verdeelde stochasten zijn met verwachting 1 en variantie 4. Laat $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$. Geef de benadering van $\mathrm{P}(Y < 110)$ volgens de centrale limietstelling:

a. 0.0228 **b.** 0.1587 **c.** 0.3085 **d.** 0.6915 **e.** 0.8413 **f.** 0.9872

7. De stochasten X en Y hebben simultane kansverdeling

$$f(x,y) = e^{-x-y} \quad \text{voor} \quad x, y \geq 0.$$

De kans $\mathrm{P}(X > 1, Y \geq 1)$ is gelijk aan

a. e^{-2} **b.** e^{-1} **c.** $e^{-2} + e^{-1}$ **d.** $2e^{-2}$ **e.** $2e^{-2} + e^{-1}$ **f.** $-2e^{-2} + e^{-1}$

8. Als X en Y onafhankelijk van elkaar zijn en ieder Poisson verdeeld met verwachting gelijk aan 1, dan is $\mathrm{P}(X + Y = 2)$ gelijk aan

a. $2e^{-1}$ **b.** e^{-1} **c.** e^{-2} **d.** $4e^{-2}$ **e.** $e^{-2} + e^{-1}$ **f.** $2e^{-2}$

9. Je speelt mee met een bingo net zolang totdat je de hoofdprijs wint. Welk type kansverdeling beschrijft het aantal keer dat je meespeelt het beste?

a. Pareto **b.** Binomiaal **c.** Geometrisch
d. Poisson **e.** Exponentieel **f.** Normaal

10. Drie mannen en drie vrouwen zitten aan een ronde tafel. Ze zijn willekeurig gaan zitten. Hoe groot is de kans dat de vrouwen en mannen om en om zitten?

a. $\frac{1}{64}$ **b.** $\frac{5}{64}$ **c.** $\frac{1}{10}$ **d.** $\frac{1}{32}$ **e.** $\frac{5}{32}$ **f.** $\frac{1}{5}$

11. In een partij van 1000 gloeilampen zit gemiddeld 1 kapotte lamp. Welk type kansverdeling beschrijft het aantal kapotte lampen dat in een partij zit het beste?

a. Pareto **b.** Bernoulli **c.** Geometrisch
d. Poisson **e.** Exponentieel **f.** Normaal

12. De momentgenererende functie van een $U(0, 1)$ verdeelde stochastische variabele is gelijk aan

a. e^t **b.** $1 - e^t$ **c.** $1 - e^{-t}$
d. t **e.** $(e^t - 1)/t$ **f.** e^t/t

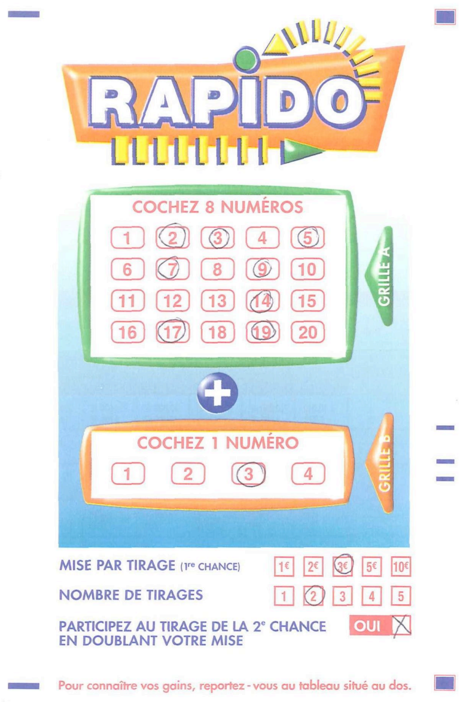
Open vragen

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands.

1. In Franse cafés wordt het spel Rapido gespeeld. We bekijken hier een ietwat vereenvoudigde opzet. Het spel gaat als volgt. Er zijn 2 ronden. Bij iedere ronde vul je een rooster in ("grille A" en "grille B"). Zie figuur 1. Bij ronde A kies je 8 getallen uit de verzameling $\{1, 2, \ldots, 20\}$. Bij ronde B kies je één getal uit de getallen $\{1, 2, 3, 4\}$. Als je het formulier hebt ingevuld, dan zie je vervolgens op een monitor 8 getallen verschijnen die getrokken worden bij ronde A. Vervolgens zie je nog één getal verschijnen dat getrokken wordt bij ronde B. We gaan ervan uit dat de computer de 8 getallen bij ronde A willekeurig zonder terugleggen kiest uit de verzameling $\{1, 2, \ldots, 20\}$. Net zo gaan we ervan uit dat de computer bij ronde B een willekeurig getal uit $\{1, 2, 3, 4\}$ kiest. Verder nemen we aan dat de uitkomsten bij ronde A en ronde B onafhankelijk van elkaar worden gegenereerd.

a. Bereken de kans p dat je bij ronde A precies 5 getallen goed hebt gegokt.

b. Voor de eenvoud stellen we nu dat je alleen een prijs wint als je er precies 5 goed hebt gegokt (in werkelijkheid win je natuurlijk ook als je er meer dan 5 goed hebt gegokt). De hoogte van je winst hangt af van het resultaat bij ronde B. Als je (naast



Figuur 1: Invulformulier bij Rapido.

de 5 goed gegokte getallen bij ronde A), ook bij ronde B wint, dan krijg je 5 keer je inzet terug. Als je na de 5 goed gegokte getallen vervolgens bij ronde B verliest, dan krijg je 2 keer je inzet terug. Bereken je verwachte winst als je 1 euro inzet.
Indien je het antwoord op vraag **a** *niet weet, neem dan* $p = 0.15$.

c. Wat is de kans dat je bij ronde A alle getallen goed hebt, en ook bij ronde B het goede getal hebt gegokt?

2. Gegeven is de random variable X met verdelingsfunctie

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2}x & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x & 1 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}.$$

a. Welke waarden kan X aannemen?

b. Bereken $\mathrm{P}\big(\frac{1}{2} \le X \le 1\frac{1}{2}\big)$.

c. Bereken $\mathrm{P}(X = 1)$ en $\mathrm{P}\big(X = \frac{1}{4}\big)$.

d. Geef aan hoe je de random variable X kan simuleren met behulp van een $U(0,1)$-verdeelde random variable.

3. Stel X en Y zijn onafhankelijke stochasten met kansverdelingen gegeven door

$$\mathrm{P}(X=0) = \mathrm{P}(X=1) = \frac{1}{2} \qquad \mathrm{P}(Y=0) = \frac{1}{3}, \quad \mathrm{P}(Y=1) = \frac{2}{3}.$$

a. Bereken de kansmassafunctie van $Z = X + Y$.

b. Bereken $\mathrm{Cov}(2X, Z)$.

Antwoorden multiple choice:

1 d. Door onafhankelijkheid geldt $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}$ en $\mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}$. Merk op dat $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A \mid B)\,\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Dus $\mathrm{P}(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

2 a. Als A de gebeurtenis is dat onderdeelt A kapot gaat, en B de gebeurtenis dat onderdeel B kapot gaat, dan is de gevraagde kans

$$\mathrm{P}((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)\,.$$

Dit is met een plaatje makkelijk in te zien. Er geldt $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A \mid B)\,\mathrm{P}(B) = 0.4 \cdot 0.2 = 0.08$. Dus is de gevraagde kans $0.1 + 0.2 - 2 \cdot 0.08 = 0.14$.

3 f. Als $y \in (-\infty, 1)$,

$$P(Y \leq y) = P(1 - 3X \leq y) = P(3X \geq 1 - y) = P(X \geq (1-y)/3) = e^{-2(1-y)/3}.$$

4 a. Variatie op opgave 6, Grimaldi §9.2: Bepaal de coëfficiënt van x^{48} in $(x^5 + x^6 + x^7 + \cdots)^6$. Door de factor x^5 buiten haakje te brengen zien we dat de vraag hetzelfde is als: Bepaal de coëfficiënt van x^{18} in $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^6 = (1-x)^{-6}$, waarbij de laatste stap volgt uit de geometrische reeks. Invullen van $n = 6$ en $k = 18$ in $\binom{n+k-1}{k} = \binom{23}{18}$.

5 b. Bewering A is niet waar omdat $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$ geldt wanneer X en Y ongecorreleerd zijn. Nu kan het zijn dat X en Y ongecorreleerd zijn, maar niet onafhankelijk (neem bijv. X standaard normaal verdeeld en $Y = X^2$). Bewering B is waar, zie hoofdstuk 10 MIPS.

6 d.

$$\mathrm{P}(Y < 110) = \mathrm{P}\left(\frac{Y - 100}{\sqrt{100 \cdot 4}} \leq \frac{10}{\sqrt{100 \cdot 4}}\right) \approx \Phi(0.5) \approx 0.69.$$

7 a. Het is eenvoudig in te zien dat f de kansdichtheid is van 2 onafhankelijke exponentieel verdeelde stochasten. Daarom geldt

$$\mathrm{P}(X > 1, Y \geq 1) = \mathrm{P}(X > 1)\,\mathrm{P}(Y \geq 1) = e^{-1}e^{-1}.$$

8 f. De som $X + Y$ is Poisson verdeeld met parameter gelijk aan 2. Dus is de gevraagde kans gelijk aan $e^{-2}\frac{2^2}{2} = 2e^{-2}$.

9 c: Discrete stochast dus b of c of d. Wachten tot een gebeurtenis optreedt, dus c.

10 c: Nummer de stoelen 1 t/m 6. De personen op stoel 3 en stoel 5 zijn van hetzelfde geslacht als die op stoel 1. Hoe groot is deze kans? De kans dat stoel 3 hetzelfde geslacht krijgt toegewezen als stoel 1 is $\frac{2}{5}$. Er zijn immers 5 kandidaten waarvan 2 van het juiste geslacht. De kans dat stoel 5 hetzelfde geslacht krijgt als 1 en 3 is vervolgens $\frac{1}{4}$. Er zijn immers nog 4 kandidaten over waarvan 1 van het juiste geslacht. Er zijn andere manieren om deze kans te berekenen, maar die leveren hopelijk allemaal hetzelfde antwoord op!

11 d: De precieze kansverdeling is binomiaal, maar die staat er niet tussen. Gelukkig is Poisson hier een goede benadering, want het verwachte aantal kapotte lampen is relatief klein tov het totaal.

12 e. $M(t) = \mathrm{E}\left[e^{tU}\right] = \int_0^1 e^{tu}du = (e^t - 1)/t$.

Antwoorden open vragen:

1 a. In feite kunnen we kijken naar het volgende probleem. In een vaas zitten 8 groene en 12 rode ballen. Wat is de kans dat we precies 5 groene ballen pakken? Deze wordt gegeven door

$$p = \frac{\binom{8}{5}\binom{12}{3}}{\binom{20}{8}} \approx 0.0978.$$

b. De kansverdeling van de winst W is als volgt

w	5	1	-1
$\mathrm{P}(W = w)$	p/4	3p/4	1-p

De verwachte winst is dus

$$\mathrm{E}[W] = \tfrac{5}{4}p + \tfrac{3}{4}p - (1 - p) = 3p - 1 \approx -0.707.$$

Indien $p = 0.15$, dan is het antwoord dus -0.55.
c. De gevraagde kans is $\frac{1}{4\binom{20}{8}} \approx 7.94 \cdot 10^{-6}\frac{1}{4} \approx 1.98 \cdot 10^{-6}$.

2 a. X neemt waarden tussen 0 en 2 aan.
b. $\mathrm{P}\big(\frac{1}{2} \leq X \leq 1\frac{1}{2}\big) = F(1\frac{1}{2}) - F(\frac{1}{2}) = \frac{7}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$.
c. $\mathrm{P}(X = 1) = \frac{1}{4}$ en $\mathrm{P}\big(X = \frac{1}{4}\big) = 0$.
d. Als $U \in (0, 1/2)$, dan $X = 2U$. Als $U \in [1/2, 3/4)$, dan $X = 1$. Als $U \in (3/4, 1)$, dan $X = 4U - 2$.

3 *Zie ook opgave 9.8 MIPS, opgave a is een variatie hierop.*
a. Merk op dat Z waarden $0, 1, 2$ aanneemt.

$$\mathrm{P}(Z = 0) = \mathrm{P}(X = 0, Y = 0) = \tfrac{1}{6}.$$

Net zo

$$\mathrm{P}(Z = 1) = \mathrm{P}(X = 0, Y = 1) + \mathrm{P}(X = 1, Y = 0) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2}$$

en

$$\mathrm{P}(Z = 2) = \mathrm{P}(X = 1, Y = 1) = \tfrac{1}{3}.$$

b.

$$\mathrm{Cov}(2X, Z) = \mathrm{Cov}(2X, X + Y) = 2\mathrm{Var}(X) + 2\mathrm{Cov}(X, Y) = 2\mathrm{Var}(X)\,,$$

want X en Y zijn onafhankelijk. Nu is X Bernoulli verdeeld met parameter $\frac{1}{2}$, dus geldt $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{4}$. Hieruit volgt dat $\mathrm{Cov}(2X, Z) = \frac{1}{2}$.