

Kansrekening en statistiek
wi2105IN–deel I
2 november 2007, 14.00–17.00 uur

Bij dit examen is het gebruik van een (evt. grafische) rekenmachine toegestaan. Tevens krijgt u een formuleblad uitgereikt—na afloop inleveren alstublieft. Normering: De meerkeuze vragen en de open vragen tellen elk voor de helft van het cijfer. Bij de open vragen telt elk (vraag)onderdeel even zwaar.

Meerkeuzevragen

Toelichting: In het algemeen zijn niet altijd vijf van de zes alternatieven 100% fout, het juiste antwoord is het meest volledige antwoord. Maak op het bijgeleverde antwoordformulier het hokje behorende bij het door u gekozen alternatief zwart of blauw. Doorstrepen van een fout antwoord heeft geen zin: u moet het òf uitgummen, òf verwijderen met correctievloeistof òf een nieuw formulier invullen. Vergeet niet uw studienummer in te vullen en aan te strepen.

1. Gebeurtenissen A en B zijn onafhankelijk met $P(A) = \frac{1}{3}$ en $P(B) = \frac{1}{4}$. Dan is $P(A \cap B^c)$:
a. $\frac{1}{3}$ b. $\frac{1}{4}$ c. $\frac{1}{6}$ d. $\frac{3}{7}$ e. $\frac{4}{7}$ f. $\frac{1}{12}$
2. Gedurende een periode van 8 uur arriveren klanten bij een loket volgens een Poisson proces met intensiteit $\lambda = 2$ per uur. Noem X_1 het aantal klanten dat aankomt in het eerste uur, X_2 het aantal in het tweede uur, enzovoort. De stochast N telt hoeveel van de stochasten $X_1, X_2, \dots, X_8$ de uitkomst nul hebben, dat wil zeggen hoeveel van de klokuren “leeg” waren. Dan heeft N een
a. Poisson verdeling met $\mu = 8$.
b. Poisson verdeling met $\mu = 16$.
c. Exponentiële verdeling met $\lambda = 1$.
d. Exponentiële verdeling met $\lambda = 2$.
e. binomiale verdeling met $n = 8$ en $p = 1/e^2$.
f. binomiale verdeling met $n = 16$ en $p = 1/e$.
3. Stel de stochast X heeft de dichtheid

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & \text{als } 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

Dan is $P(\frac{2}{3} \leq X \leq \frac{4}{3})$ gelijk aan

- a. $\frac{1}{3}$ b. $\frac{1}{2}$ c. $\frac{2}{9}$ d. $\frac{6}{9}$ e. $\frac{7}{27}$ f. $\frac{12}{27}$
4. [vervolg op de vorige opgave]
Voor een $U(0, 1)$ -verdeelde U heeft de volgende stochast dezelfde verdeling als X :
a. $2U^3$ b. $2U^2$ c. $\frac{3}{8}U^2$ d. $8/U^3$ e. $\sqrt[3]{8U}$ f. $\sqrt{8U/3}$
 5. Stel U_1 en U_2 zijn onafhankelijke stochasten met een $U(0, 1)$ -verdeling. De variantie van $2 + 3U_1 - U_2$ is gelijk aan
a. $\frac{2}{12}$ b. $\frac{4}{12}$ c. $\frac{8}{12}$ d. $\frac{10}{12}$ e. $\frac{26}{12}$ f. 6

6. X en Y hebben een gezamenlijke verdeling volgens de volgende tabel

$P(X = a, Y = b)$		b			$P(X = a)$
		1	2	3	
a	-1	0.20	0.10	0.10	0.40
	0	0.10	0.05	0.05	0.20
	1	0.10	0.10	0.20	0.40
$P(Y = b)$		0.40	0.25	0.35	1

Bereken $\text{Cov}(2X, Y)$.

- a. -0.20 b. -0.10 c. 0 d. 0.20 e. 0.30 f. 0.40

7. De verdelingsfunctie van een stochast X wordt gegeven door

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{als } x \leq 0 \\ \frac{1}{3}\sqrt{x}, & \text{als } 0 \leq x \leq 9 \\ 1, & \text{als } x \geq 9 \end{cases}$$

De verwachting van X is:

- a. 3 b. 4.5 c. 6 d. 6.67 e. 9 f. 32.4

8. [vervolg van vorige opgave]

De stochasten X_1 , X_2 , X_3 en X_4 zijn onafhankelijk met verdelingsfunctie als hierboven. Dan is de verwachting van $M = \max(X_1, X_2, X_3, X_4)$ gelijk aan:

- a. 3 b. 4.5 c. 6 d. 7 e. 9 f. 12

9. Stochasten X en Y zijn onafhankelijk; X met een $N(5, 8)$ verdeling; Y met een $N(2, 1)$ verdeling. Dan is $P(X - Y \leq 2)$ gelijk aan

- a. 0.12 b. 0.17 c. 0.23 d. 0.27 e. 0.31 f. 0.37

10. X en Y hebben een gezamenlijke verdeling volgens de volgende (nog onvolledige) tabel:

$P(X = a, Y = b)$		b			$P(X = a)$
		1	2	3	
a	0	0.10			0.40
	1	0.30			
$P(Y = b)$					

Verder gegeven: $P(Y = 1 | X = 0) = 0.4$ en $P(Y = 2 | X = 1) = 0.4$. Dan is $P(Y = 3)$ gelijk aan

- a. 0.10 b. 0.12 c. 0.15 d. 0.16 e. 0.20 f. 0.24

11. Stel Y heeft een normale verdeling met parameters $\mu = 3$, $\sigma^2 = 5$. Het getal c waarvoor geldt $P(Y \leq c) = 0.1$ is bij benadering gelijk aan

- a. -3.4 b. -1.69 c. -0.45 d. 0.14 e. 0.45 f. 0.97

12. Voor de stochast X geldt $P(X = i) = 1/10$ voor $i = 1, \dots, 10$. Dan wordt de kansgenererende functie van X gegeven door:

- a. $\frac{1-s^{10}}{1-s}$ b. $\frac{s-s^{10}}{1-s}$ c. $\frac{1}{10} \frac{1}{1-s}$ d. $\frac{1}{10} \frac{1-s^{10}}{1-s}$ e. $\frac{s}{10} \frac{1-s^{10}}{1-s}$ f. $\frac{s}{10-s}$

13. Een docent maakt een examen met 12 vierkeuze vragen, waarbij drie vragen ‘a’ als antwoord hebben, drie ‘b’, drie ‘c’ en drie ‘d’. Hoeveel verschillende antwoorderseries zijn er mogelijk?
- a. 20736 b. 34650 c. 369600 d. 16777216 e. 319334400 f. 479001600
14. De genererende functie van de rij $0 \cdot 1, 1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots$ wordt gegeven door:
- a. $x(1-x)^{-2}$ b. $(x+x^2)(1-x)^{-2}$ c. $2x(1-x)^{-3}$
d. $(x+x^2)(1-x)^{-3}$ e. $2(1-x)^{-3}$ f. $6(1-x)^{-4}$
15. Wat is coefficient van $a^2b^3c^2d^5$ in de ontwikkeling van $(a+2b-3c+2d+5)^{16}$?
- a. $2304 \binom{16}{2,3,2,5,4}$ b. $2304 \binom{16}{2,3,2,5}$ c. $1\,440\,000 \binom{16}{2,2,3,4,5}$
d. $1\,440\,000 \binom{16}{2,2,3,5}$ e. $625 \binom{16}{2,3,2,5,4}$ f. $\binom{16}{1,2,3,2,5}$

Open vragen

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands.

- Een digitaal-analoog converter zet binaire codewoorden om in analoge, continue signalen. Hierbij correspondeert ‘1’ met 5 V(olt) en ‘0’ met 0 V. Bij het analoog-digitaal (terug) converteren wordt soms een omslag (van 0 naar 5 V of terug) te laat geregistreerd, waardoor er in het eerste bit na de omslag een fout optreedt. Het woord ‘00110’ bevat twee zulke omslagpunten en hiervan kan zo dus het derde en het vijfde bit verkeerd worden ontvangen. Bij iedere omslag is de kans op een fout 0.01.
 - Hoeveel verschillende woorden van lengte 8 zijn er met 2 omslagpunten? Algemeen: hoeveel verschillende woorden van lengte n zijn er met k omslagpunten?
 - Beschouw de 2-bit woorden: ‘00’, ‘01’, ‘10’ en ‘11’, optredend met respectievelijke kansen 0.16, 0.24, 0.24 en 0.36. Er wordt ‘00’ ontvangen. Wat is de kans dat het verzonden woord ‘01’ was?
 - Ter bestrijding van de optredende fouten beperken men zich tot woorden waarin rijtjes nullen en enen minstens twee bits lang zijn. Dus ‘0111001’ wordt uitgesloten, maar ‘001110011’ is bruikbaar. Hoeveel verschillende woorden van lengte n zijn er met k omslagpunten, rekening houdend met deze beperking?
- De stochast X heeft de volgende kansdichtheid:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3} \quad \text{als } -1 \leq x \leq 1,$$

en buiten dit interval geldt $f(x) = 0$.

- Bepaal de verdelingsfunctie van X .
 - Bepaal mediaan van X .
 - Bepaal $E[2X+5]$ en $\text{Var}(2X+5)$.
3. De onafhankelijke stochasten $X_1, \dots, X_{100}$ hebben allemaal een $\text{Par}(3)$ -verdeling. Hun som noemen we S .
- Bepaal de verwachting en variantie van S .
 - Geef een benadering voor $P(S > 170)$ met behulp van de centrale limietstelling.

Antwoorden multiple choice:

1 b. $P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c)$ want A en B^c zijn onafhankelijk, deze kans is gelijk aan $P(A)(1 - P(B)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

2 e. De stochast N representeert het aantal successen in 8 experimenten, waarbij het experiment wordt voorgesteld door het binnenkomen van klanten gedurende 1 uur, en ‘succes’ overeenkomt met een uur waarin geen enkele klant is binnen gekomen. Dit betekent dat N een binomiale verdeling heeft met $n = 8$ en p gelijk aan de kans op 0 klanten in een uur. Volgens de eigenschappen van het Poisson process heeft het aantal klanten dat in een uur binnenkomt een Poisson verdeling met parameter $\mu = 2$, dus is de kans op 0 klanten gelijk aan e^{-2} .

3 e. Voor de verdelingsfunctie F vinden we, voor $\leq x \leq 2$: $F(x) = (x/2)^3$. Dus $P(\frac{2}{3} \leq X \leq \frac{4}{3}) = F(4/3) - F(2/3) = (2/3)^3 - (1/3)^3 = 7/27$.

4 e. Uit $F(x) = u$, met $F(x) = (x/2)^3$, lossen we u op met als resultaat: $F^{inv}(u) = 2\sqrt[3]{u}$. De stochast $F^{inv}(U)$ heeft de gevraagde verdeling.

5 d. Via het formuleblad: $\text{Var}(U_i) = \frac{1}{12}$. Vanwege de onafhankelijkheid: $\text{Var}(2 + 3U_1 - U_2) = \text{Var}(3U_1) + \text{Var}(-U_2) = \frac{9}{12} + \frac{1}{12} = \frac{10}{12}$.

6 f. Via de formules $\text{Cov}(2X, Y) = 2\text{Cov}(X, Y)$ en $\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$: $E[X] = 0$. Dus $\text{Cov}(X, Y) = E[XY] = -0.20 - 0.20 - 0.30 + 0.10 + 0.20 + 0.60 = 0.20$, en het antwoord luidt: $\text{Cov}(2X, Y) = 2 \cdot 0.20 = 0.40$.

7 a.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \int_0^9 xF'(x) dx = \int_0^9 x \frac{1}{6\sqrt{x}} dx = \int_0^9 \frac{1}{6}\sqrt{x} dx = \frac{1}{6} \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} \right]_0^9 = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot 9\sqrt{9} = 3$$

8 c. Voor $0 \leq x \leq 9$ geldt $F_M(x) = [F(x)]^4 = x^2/81$ en $f_M(x) = 2x/81$, waaruit $E[M] = 6$.

9 f. $X - Y = X + (-Y)$ heeft een $N(5 - 2, 8 + 1)$ verdeling, dus

$$P(X - Y \leq 2) = P\left(\frac{X - Y - 3}{3} \leq \frac{2 - 3}{3}\right) = P(Z \leq -1/3) = P(Z \geq 1/3) \approx 0.37.$$

10 e. Allereerst: $P(X = 1) = 1 - P(X = 0) = 0.6$. Vervolgens: $P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0)P(Y = 1 | X = 0) = 0.16$ en $P(X = 1, Y = 2) = P(X = 1)P(Y = 2 | X = 1) = 0.24$.

Dan: $P(Y = 1) = 0.16 + 0.30 = 0.46$, $P(Y = 2) = 0.10 + 0.24 = 0.34$, dus $P(Y = 3) = 1 - (0.46 + 0.34) = 0.20$.

11 d. $P(Y \leq c) = P\left(\frac{Y-3}{\sqrt{5}} \leq \frac{c-3}{\sqrt{5}}\right) = P\left(Z \leq \frac{c-3}{\sqrt{5}}\right) = 0.1$. Dus $\frac{c-3}{\sqrt{5}} = -1.28$ (tabel) en $c = -1.28 \cdot \sqrt{5} + 3 \approx 0.1378$.

12 e.

$$E[s^X] = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{10} s^i = \frac{s}{10} \sum_{i=0}^9 s^i = \frac{s}{10} \frac{1 - s^{10}}{1 - s}.$$

13 c. De vraag is hoeveel woorden gemaakt kunnen worden met de letters *aaabbbccdd*: $12!/(3!)^4 = 369600$.

14 c. Twee maal differentieren van $(1-x)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$ geeft: $2(1-x)^{-3} = \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)x^{i-2} = \sum_{j=0}^{\infty} j(j+1)x^j = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \dots$. Dit resultaat moet nog met x worden vermenigvuldigd om alles “eentje op te schuiven” en het getal $0 \cdot 1$ voor te voegen.

15 c. Dit is Example 1.26b uit Grimaldi; zie aldaar.

Antwoorden open vragen:

1a Een woord van lengte n heeft $n-1$ mogelijke omslagpunten. Als $n > k$, dan kunnen we k van de $n-1$ omslagpunten kiezen; hiervoor zijn $\binom{n-1}{k}$ mogelijkheden. Gegeven de omslagpunten legt de keuze van het eerste bit de hele string vast, er zijn dus 2 mogelijkheden. Kortom: voor $n > k$

$$2 \binom{n-1}{k}$$

en anders 0. Voor $n = 8$ en $k = 2$ vinden we zo: 42.

1b Er zijn twee mogelijkheden om ‘00’ te ontvangen. De eerste is: er is ‘00’ verstuurd; hierin kan geen fout optreden. De tweede is: er is ‘01’ verstuurd en de omslag is niet geregistreerd. Kans op het eerste: 0.16; op het tweede: $0.24 \times 0.01 = 0.0024$. Dus

$$P(01 \text{ verzonden} \mid 00 \text{ ontvangen}) = \frac{0.0024}{0.16 + 0.0024} = 0.0148.$$

1c Een woord met k omslagpunten bestaat uit $k+1$ rijtjes, om en om van nullen en enen. We eisen nu dat elk van die rijtjes minstens 2 bits bevat. Noem x_i de lengte van het i -de rijtje. De vraag kan geherformuleerd worden als: hoeveel oplossingen zijn er voor

$$x_1 + \dots + x_{k+1} = n, \quad x_i \geq 2, i = 1, \dots, k+1?$$

Via de substitutie $y_i = x_i - 2$ krijgen we

$$y_1 + \dots + y_{k+1} = n - 2(k+1), \quad y_i \geq 0, i = 1, \dots, k+1.$$

We zien dat $n \geq 2(k+1)$ moet gelden, wat logisch is (ga na!). Het antwoord is dus

$$2 \binom{n - 2(k+1) + k}{k} = 2 \binom{n - k - 2}{k}.$$

N.B. Onderdeel **a.** had op soortgelijke wijze opgelost kunnen worden.

2a Voor $x < -1$ geldt $F(x) = 0$, voor $x > 1$ dat $F(x) = 1$, en voor $-1 \leq x \leq 1$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-1}^x \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3} \right) dt = \left[\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{3}t \right]_{-1}^x \\ &= \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x - \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

N.B. Ten controle vullen we $x = -1$ en $x = 1$ in en vinden respectievelijk 0 en 1, zoals moet.

2b De kansdichtheid is symmetrisch rondom nul, dat is dus de mediaan. Ter controle bepalen we $F(0)$, daar komt inderdaad 0.5 uit.

2c We bepalen eerst $E[X]$ en $\text{Var}(X)$:

$$E[X] = \int_{-1}^1 t \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3} \right) dt = \left[\frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{6}t^2 \right]_{-1}^1 = 0.$$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-1}^1 t^2 \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3} \right) dt = \left[\frac{1}{10}t^5 + \frac{1}{9}t^3 \right]_{-1}^1 \\ &= \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{9} \right) - \left(-\frac{1}{10} - \frac{1}{9} \right) = 2\frac{19}{90} = \frac{19}{45}. \end{aligned}$$

Dus $\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{19}{45}$. Nu volgt eenvoudig:

$$E[2X + 5] = 5 \quad \text{en} \quad \text{Var}(2X + 5) = 2^2 \cdot \frac{19}{45} = \frac{76}{45} \approx 1.69.$$

3a Wegens $E[X] = 3/2$ en $\text{Var}(X) = 3/4$ geldt $E[S] = 100 \cdot 3/2 = 150$ en $\text{Var}(S) = 100 \cdot 3/4 = 75$.

3b Er geldt

$$P(S > 170) = P\left(\frac{S - 150}{\sqrt{75}} > \frac{170 - 150}{\sqrt{75}} \right) \approx P(Z > 2.31) \approx 0.0104.$$