

Tentamen Kansrekening en statistiek
wi2105IN
1 november 2006, 14.00–17.00 uur

Bij dit examen is het gebruik van een (evt. grafische) rekenmachine toegestaan. Tevens krijgt u een formuleblad uitgereikt—na afloop inleveren alstublieft. Normering: De meerkeuze vragen en de open vragen tellen elk voor de helft van het cijfer. Bij de open vragen telt elk (vraag)onderdeel even zwaar.

Meerkeuzevragen

Toelichting: In het algemeen zijn niet altijd vijf van de zes alternatieven 100% fout, het juiste antwoord is het meest volledige antwoord. Maak op het bijgeleverde antwoordformulier het hokje behorende bij het door u gekozen alternatief zwart of blauw. Doorstrepen van een fout antwoord heeft geen zin: u moet het òf uitgummen, òf verwijderen met correctievloeistof òf een nieuw formulier invullen. Vergeet niet uw studienummer in te vullen en aan te strepen.

1. Uit een studie blijkt dat 57% van de informatica studenten werk zal vinden wat in het verlengde ligt van hun afstudeerrichting. Dan is de kans, dat onder acht willekeurig gekozen informatica studenten er tenminste 1 student werk zal vinden wat in het verlengde ligt van de afstudeerrichting:

a. 0.011 b. 0.125 c. 0.570 d. 0.911 e. 0.989 f. 0.999

2. Gegeven zijn drie onafhankelijke gebeurtenissen A , B en C , met $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ en $P(C) = \frac{1}{2}$. Dan is de kans dat precies één van de drie optreedt:

a. $\frac{1}{3}$ b. $\frac{1}{2}$ c. $\frac{2}{3}$ d. $\frac{4}{9}$ e. $\frac{5}{9}$ f. $\frac{5}{18}$

3. Van twee gebeurtenissen A en B is gegeven

$$P(B) = \frac{2}{3}, \quad P(A|B) = \frac{1}{4} \quad \text{en} \quad P(A|A \cup B) = \frac{2}{5}.$$

Bereken $P(A)$.

a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{1}{3}$ c. $\frac{1}{4}$ d. $\frac{1}{5}$ e. $\frac{2}{5}$ f. $\frac{1}{6}$

4. Een geheel getal x met $0 \leq x < 10^6$, wordt geschreven in decimaalvorm $x = x_5x_4x_3x_2x_1x_0$, met $0 \leq x_i \leq 9$ voor $0 \leq i \leq 5$. Het aantal getallen zonder onmiddellijke cijferherhaling (dus $x_i \neq x_{i+1}$) noemen we m . Het aantal getallen met precies 3 van de x_i gelijk aan 7 noemen we n . Dan geldt:

a. $m = 10 \cdot 9^5$ en $n = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 9^3$ b. $m = 9^6$ en $n = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 9^3$
c. $m = 10^6$ en $n = \binom{6}{3} 9^3$ d. $m = 10 \cdot 9^5$ en $n = \binom{6}{3} 9^3$
e. $m = 9^6$ en $n = \binom{6}{3} 9^3$ f. $m = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ en $n = \binom{6}{3} 10^3$

5. De stochastische variabele X heeft kansdichtheid $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{als } 1 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$

Dan is $\text{Var}(3X + 2)$ gelijk aan

a. $\frac{26}{15}$ b. $\frac{62}{15}$ c. $\frac{49}{15}$ d. $\frac{34}{5}$ e. $\frac{49}{5}$ f. $\frac{62}{5}$

6. Gegeven is de verdelingsfunctie F waarvoor: $F(x) = 0$ voor $x < \sqrt{3}$ en $F(x) = 1 - \frac{3}{x^2}$ voor $x \geq \sqrt{3}$. Als U een $U(0,1)$ -verdeelde stochast is, dan heeft de volgende stochast verdelingsfunctie F :

a. $1 - 3/U^2$ b. $\sqrt{3/U}$ c. $6/U$ d. $-3 \ln U$ e. $\sqrt{3}/U$ f. $\sqrt{3}/U^3$

7. Voor een visgroothandel is een geautomatiseerd vissorteringssysteem ontwikkeld. Om het systeem te testen zijn 100 zeebaarsen en 100 zalmen aangeboden ter classificatie, met het volgende resultaat:

werkelijke soort	geclassificeerd als	
	zeebaars	zalm
zeebaars	80	20
zalm	10	90

Een willekeurige vis, gevangen in een gebied waar de verhouding zeebaars-zalm ongeveer 70 : 30 is, wordt door het systeem als zeebaars geclassificeerd. Dan is de kans dat het echt zeebaars is ongeveer

- a. 0.45 b. 0.59 c. 0.70 d. 0.80 e. 0.89 f. 0.95
8. Piet speelt elke maand mee in twee loterijen. In de ene loterij heeft hij kans 1 op 2000 op een prijs van meer dan € 1000, en in de andere loterij is die kans 1 op 3000. Stel Y is de periode totdat hij een keer zo'n grote prijs wint. De verwachting van Y in maanden is ongeveer gelijk aan:
- a. 600 b. 750 c. 900 d. 1200 e. 2000 f. 3000
9. De stochast X heeft de volgende kansmassafunctie

a	-2	0	1	2	3	4
$P(X = a)$	0.2	0.1	0.3	0.2	0.1	0.1

Dan geldt: $E[X^2 - 2X] =$

- a. 2.0 b. 2.4 c. 2.8 d. 3.2 e. 3.5 f. 3.8
10. Gegeven de $Exp(\lambda)$ verdeelde stochast X met momentgenererende functie $M(t) = \lambda/(\lambda - t)$, voor $t < \lambda$. Daaruit kunnen we afleiden dat $E[X^4]$ gelijk is aan:
- a. $4/\lambda$ b. $1/\lambda^4$ c. $4/\lambda^4$ d. $24/\lambda^4$ e. λ^4 f. $\lambda/(\lambda - 4)$
11. S is de som van drie onafhankelijke $Geo(1/2)$ -verdeelde stochasten. Dan is de kansgenererende functie $G(s)$ gelijk aan:
- a. $s^3/(2 - s)$ b. $s^3/(2 - s)^3$ c. $8/(2 - s)^3$
d. $1/(2 - s)^3$ e. $1/(2 - s)$ f. $3s/(2 - s)$
12. Een satisfiability-prover is een programma dat naar oplossingen zoekt die voldoen aan een groot aantal condities. Van twee van zulke provers is bekend over de benodigde runtijden, X en Y , op een bepaalde klasse van testproblemen: $\text{Var}(X) = 4$, $\text{Var}(Y) = 1$ en de correlatie is 0.5. Dan is de variantie van het verschil in benodigde runtijd:
- a. 1 b. 3 c. 4 d. 5 e. 6 f. 7
13. De genererende functie van de rij $\binom{8}{1}, 4\binom{8}{2}, 9\binom{8}{3}, \dots, 64\binom{8}{8}$, wordt gegeven door:
- a. $56(1 + x)^6$ b. $8(1 + 8x)(1 + x)^6$ c. $8x(1 + x)^7$
d. $8(1 + x)^7$ e. $8(1 + x^2)^7$ f. $(8 + x)^8$
14. Een bottelmachine in een bierbrouwerij vult flesjes met een hoeveelheid bier B die normaal verdeeld is met $\mu = 300$ (ml) en $\sigma^2 = 25$ (ml²). Hoe groot is de kans dat een krat van 24 flesjes in totaal minder dan 7150 ml bier bevat?
- a. 0.0059 b. 0.021 c. 0.0485 d. 0.0668 e. 0.113 f. 0.123

15. Wat is coefficient van $a^2b^3c^2d^5$ in de ontwikkeling van $(a + 2b - 3c + 2d + 5)^{16}$?

- a. $2304 \binom{16}{2,3,2,5,4}$ b. $2304 \binom{16}{2,3,2,5}$ c. $1\,440\,000 \binom{16}{2,2,3,4,5}$
d. $1\,440\,000 \binom{16}{2,2,3,5}$ e. $625 \binom{16}{2,3,2,5,4}$ f. $\binom{16}{1,2,3,2,5}$

Open vragen

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands.

- Aan de loting voor de UEFA play-offs in 2004 deden 10 teams mee. De eerste twee getrokken teams speelden tegen elkaar, de derde en de vierde tegen elkaar, enzovoort. Vijf van de teams werden als "sterk" beschouwd en vijf als "zwak." Beschouw de gebeurtenissen D_i , voor $i = 1, \dots, 5$, waarbij D_i staat voor: "het i -e getrokken paar bestaat uit een sterk en een zwak team."
 - Bepaal $P(D_1)$.
 - Bepaal $P(D_2 | D_1)$ en $P(D_1 \cap D_2)$.
 - Bepaal, doorgaand met conditionele kansen, de kans op een "dream draw": $P(D_1 \cap \dots \cap D_5)$.
- Een IP router verwerkt een stroom van datapackets die gezien mag worden als een Poisson proces, met een intensiteit van 10^6 pakketjes per seconde. Eén maal per minuut wordt een *selfcheck* uitgevoerd: er wordt een kort diagnostisch programma gedraaid; dit duurt 0.1 milliseconden. De pakketjes die gedurende die tijd binnenkomen moeten gebufferd worden.
 - Bepaal verwachting en standaardafwijking van het aantal pakketje dat gebufferd moet worden.
 - In de buffer kunnen 128 packets opgeslagen worden. Wat is de kans op een bufferoverflow tijdens de *selfcheck*? Gebruik voor deze berekening de normale verdeling als benadering voor het aantal packets dat opgeslagen moet worden; dit is op grond van de centrale limietstelling toegestaan.
 - Wanneer we kijken naar de tijdstippen waarop bufferoverflows optreden dan is dat zelf weer een Poisson-proces, zij het bij benadering. Wat is de kansverdeling van de tijd tot de eerste bufferoverflow? Leg uit. (Als je het vorige onderdeel niet kon maken, neem dan aan: $P(\text{bufferoverflow}) = 0.01$).
- Een darter werpt een pijl op een cirkelvormig bord met een straal van 1 meter. Het is niet zo'n beste speler: hij raakt het op een uniform over het bord verdeelde lokatie. Noem de afstand tot de roos X . Voor $0 \leq t \leq 1$ geldt $P(X \leq t) = t^2$.
 - Bepaal $E[X]$.
 - Hij gooit in totaal drie pijlen. Neem aan dat de worpen onafhankelijk zijn. Beschouw de pijl die het verst van de roos terechtkomt; noem de afstand tot de roos Y . Bepaal de verwachting van Y . Hint: bepaal eerst de verdelingsfunctie.

Antwoorden multiple choice:

1 f. $1 - 0.43^8$.

2 f. De gebeurtenis dat precies één ervan optreedt kan geschreven worden als

$$D = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$$

Dit is een disjuncte vereniging, en vanwege de onafhankelijkheid volgt

$$P(D) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18}.$$

3 b. Ten eerste: uit $P(A|B) = \frac{1}{4}$ volgt $P(A \cap B) = \frac{1}{4}P(B)$.

Ten tweede: uit $P(A|A \cup B) = \frac{2}{5}$ volgt $P(A) = \frac{2}{5}P(A \cup B)$, dus

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{2}{5}(P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\ &= \frac{2}{5}(P(A) + P(B) - \frac{1}{4}P(B)) \\ &= \frac{2}{5}(P(A) + \frac{3}{4}P(B)) = \frac{2}{5}P(A) + \frac{1}{5}P(B) \end{aligned}$$

Daaruit volgt via $\frac{3}{5}P(A) = \frac{1}{5}$ dat $P(A) = \frac{1}{3}$.

4 d. m : het eerste cijfer is vrij te kiezen, dus met 10 mogelijkheden; voor alle volgende is er telkens een cijferkeuze uitgesloten, dus 9, en $m = 10 \cdot 9^5$.

n : we kunnen op $\binom{6}{3}$ manieren de posities voor de zevens kiezen; voor elk van de overige posities hebben we 9 keuzemogelijkheden.

5 d.

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_1^4 x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int_1^4 \frac{1}{2} \sqrt{x} dx = \left[\frac{1}{3} x \sqrt{x} \right]_1^4 = \frac{7}{3}. \\ E[X^2] &= \int_1^4 x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int_1^4 \frac{1}{2} x \sqrt{x} dx = \left[\frac{1}{5} x^2 \sqrt{x} \right]_1^4 = \frac{31}{5}. \end{aligned}$$

Dus $\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{31}{5} - \frac{49}{9}$, en $\text{Var}(3X + 2) = 3^2 \text{Var}(X) = 9 \cdot \frac{31}{5} - 49 = \frac{34}{5}$.

6 b. Los x op uit: $F(x) = u$ voor $0 \leq u \leq 1$. Dit levert $x = \sqrt{3/(1-u)}$. Dus $X = \sqrt{3/(1-U)}$ heeft F als verdelingsfunctie. Omdat $1-U$ dezelfde verdeling heeft als U , voldoet $Y = \sqrt{3/U}$ ook.

7 f. T : "vis als zeebaars geklassificeerd"; B : "vis is zeebaars". Uit de tabel: $P(T|B) = 0.8$, $P(T|B^c) = 0.1$; voor de klassificatie zouden we schatten $P(B) = 0.7$. Uit de regel van Bayes volgt: $P(T) = 0.7 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0.1 = 0.56 + 0.03 = 0.59$ en dus $P(B|T) = 56/59 = 0.949$.

8 d. Elke maand is de kans op een prijs gelijk aan $p = 1/2000 + 1/3000 - (1/2000) \cdot (1/3000) \approx 1/2000 + 1/3000 = 5/6000$.

Y heeft een geometrische verdeling met kans p , dus $E[Y] = \frac{1}{p} \approx \frac{6000}{5} \approx 1200$ maanden.

9 b.

$$E[X^2 - 2X] = \sum_a (a^2 - 2a) \cdot P(X = a) = 8 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.1 + \dots + 8 \cdot 0.1 = 2.4$$

10 d. $E[X^4] = 24/\lambda^4$; zie voorbeeld 11.5 van de reader.

11 b. De kansgenererende functie van de $Geo(1/2)$ -verdeling is: $\sum_{k=1}^{\infty} s^k/2^k = (s/2)/(1-s/2) = s/(2-s)$. Voor de som van drie vinden we dus de derdemacht hiervan.

12 b. $Cov(X, Y) = \rho \cdot \sqrt{Var(X) Var(Y)} = 1$, dus $Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2 \cdot Cov(X, Y) = 3$.

13 b. Volgens het binomium van Newton is $(1+x)^8$ de genererende functie van $\binom{8}{k}$, $k = 0, 1, \dots$. Differentiëren geeft dus de genererende functie van $k \binom{8}{k}$, voor $k = 1, 2, \dots$: $8(1+x)^7$. Als we nog een factor k erbij willen hebben, zodat we $k^2 \binom{8}{k}$ krijgen, moeten we eerst met x vermenigvuldigen en daarna nogmaals differentieren:

$$\frac{d}{dx} 8x(1+x)^7 = 8(1+x)^7 + 56x(1+x)^6 = 8(1+8x)(1+x)^6.$$

14 b. Voer in: $X = B_1 + B_2 + \dots + B_{24}$, de totale hoeveelheid in 24 flesjes. Dan geldt: $X \sim N(24 \cdot 30, 24 \cdot 25) = N(7200, 600)$, dus $\frac{X - 7200}{\sqrt{600}} \sim N(0, 1)$. Dan:

$$P(X \leq 7150) = P\left(\frac{X - 7200}{\sqrt{600}} \leq \frac{7150 - 7200}{\sqrt{600}} = -2.0412\right) \approx 0.021.$$

15 c. Dit is Example 1.26b uit Grimaldi; zie aldaar.

Antwoorden open vragen:

1 Dit is Exercise 3.13 uit het boek, voorgemaakt op het college van 21 september 2006.

1a There are several ways to see that $P(D_1) = 5/9$. Method 1: the first team we draw is irrelevant; for the second team there are always 5 "good" choices out of 9 remaining teams. Method 2: there are $\binom{10}{2} = 45$ possible outcomes when two teams are drawn; among these, there are $5 \cdot 5 = 25$ favorable outcomes (all weak-strong pairings), resulting in $P(D_1) = 25/45 = 5/9$.

1b Given D_1 , there are 4 strong and 4 weak teams left. Using one of the methods from a on this reduced number of teams, we find $P(D_2 | D_1) = 4/7$ and $P(D_1 \cap D_2) = P(D_2 | D_1) \cdot P(D_1) = (4/7) \cdot (5/9) = 20/63$.

1c Proceeding in the same fashion, we find $P(D_3 | D_1 \cap D_2) = 3/5$ and $P(D_1 \cap D_2 \cap D_3) = P(D_3 | D_1 \cap D_2) \cdot P(D_1 \cap D_2) = (3/5) \cdot (20/63) = 12/63$. Subsequently, we find $P(D_4 | D_1 \cap \dots \cap D_3) = 2/3$ and $P(D_5 | D_1 \cap \dots \cap D_4) = 1$. The final result can be written as

$$P(D_1 \cap \dots \cap D_5) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{8}{63}.$$

The probability of a "dream draw" with n strong and n weak teams is $P(D_1 \cap \dots \cap D_n) = 2^n / \binom{2n}{n}$.

2a Het aantal heeft een $Pois(100)$ verdeling, dus verwachting 100 en standaardafwijking $\sqrt{100} = 10$.

2b Het aantal te bufferen packets B heeft verwachting én variantie 100, dus $P(B > 128) \approx P(Z > (128 - 100)/\sqrt{100}) = P(Z > 2.8) = 0.0026$. De preciezen bepalen $P(B > 128.5) \approx 0.0022$.

2c Per uur zijn er 60 selfchecks, elk met kans 0.0026 op overflow. Het verwachte aantal overflows per uur is dus 0.156. Het overflow Poisson proces heeft intensiteit 0.156 per uur. Het is bekend dat tussentijden in een Poisson proces met intensiteit λ een $Exp(\lambda)$ verdeling hebben. Dus: de tussentijd is bij benadering $Exp(0.156)$ verdeeld.

Een tweede goed antwoord: We moeten telkens een $Geo(0.0026)$ -verdeeld aantal minuten wachten op de volgende overflow: in iedere minuut is er een Bernoulli-experiment met kans 0.0026 op succes.

3a De kansdichtheid van X is $f(t) = 2t$ voor $0 \leq t \leq 1$, en $f(t) = 0$ elders. Er volgt $E[X] = \int_0^1 t \cdot 2t dt = \dots = \frac{2}{3}$.

3b Er geldt $Y = \max\{X_1, X_2, X_3\}$ waarbij X_1, X_2, X_3 onafhankelijk zijn, en verdeeld als de gegeven X . Er volgt (zie paragraaf 8.4): $F_Y(t) = t^6$ voor $0 \leq t \leq 1$. De kansdichtheid van Y is $f(t) = 6t^5$ voor $0 \leq t \leq 1$, en $f(t) = 0$ elders. Er volgt $E[Y] = \int_0^1 t \cdot 6t^5 dt = \dots = 6/7$.