

## Tentamen IN2805-A Optimalisering 13/04/2011

Er zijn zes opgaven in dit tentamen. Laat bij elk antwoord duidelijk zien hoe je eraan bent gekomen. De normering voor elke opgave staat na de laatste opgave. Het uiteindelijke cijfer krijg je door het totaal aantal punten door 10 te delen.

Het gebruik van een laptop is niet toegestaan. Het gebruik van een rekenmachine is wel toegestaan. Veel succes!

---

**Opgave 1.** De lijmfabriek GLUEFAST maakt drie verschillende soorten lijm: Standard, Glueall, en Gluelimit. De ingrediënten Sticky, Gluey, en Greasy worden in verschillende hoeveelheden bij de productie van de lijmen gebruikt. In onderstaande tabel worden de onder- en bovengrenzen op de hoeveelheden ingrediënten in de verschillende soorten lijm aangegeven.

| Ingredient | Lijmsoort |      |         |     |           |     |
|------------|-----------|------|---------|-----|-----------|-----|
|            | Standard  |      | Glueall |     | Gluelimit |     |
|            | min       | max  | min     | max | min       | max |
| Sticky     | 10%       | 50 % | 40%     | 60% | 25%       | 75% |
| Gluey      | 25%       | 35%  | 0%      | 0%  | 0%        | 35% |
| Greasy     | 25%       | 50%  | 40%     | 60% | 0%        | 30% |

Om een kilo lijm te produceren is een kilo van een mengsel van de ingrediënten nodig. De inkooprijzen van de ingrediënten zijn respectievelijk EUR 100, 75, en 125 per kilo, en de verkoopprijzen voor de lijmsorten zijn respectievelijk EUR 400, 380, en 320 per kilo. De fabriek moet om diverse redenen evenveel Sticky als Gluey inkopen. Bovendien kan de fabriek binnen de planningsperiode niet meer dan 100 kilo lijm in totaal produceren. Formuleer het productieplanningsprobleem als een lineair programmeringsprobleem gegeven dat het bedrijf de winst uit het verkoop van de lijmsorten wil maximaliseren.

### Opgave 2.

a) Los het volgende probleem op met behulp van de simplexmethode:

$$\begin{array}{rcll}
 \min z & = & 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 \\
 \text{odv} & & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 2 \\
 & & -x_1 & - & 2x_2 & & & \geq & -1 \\
 & & & & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 0 \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
 \end{array}$$

b) Formuleer het duale probleem behorend bij het probleem in 2a).

- c) Voer één iteratie van het duale simplexalgoritme uit op het onderstaand probleem. Is de verkregen oplossing optimaal? Motiveer je antwoord.

| basis | $\bar{b}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $e_2$ | $s_3$ |
|-------|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $-z$  | 2         | 4     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     |
| $x_2$ | 2         | 1     | 1     | -1    | 1     | 0     | 0     |
| $s_2$ | -3        | -1    | 0     | 2     | -2    | 1     | 0     |
| $s_3$ | 2         | 1     | 0     | 0     | 1     | 0     | 1     |

3.

- a) Gegeven zijn een primaal probleem (P) en het bijbehorende duale probleem (D):

$$(P): \min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \text{ odv } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad x \geq 0,$$

$$(D): \max w = \sum_{i=1}^m b_i y_i, \text{ odv } \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad y \text{ vrij},$$

Neem aan dat  $\hat{x}$  een toegelaten oplossing is voor (P) en dat  $\hat{y}$  een toegelaten oplossing is voor (D). Bewijs dat  $c^T \hat{x} \geq b^T \hat{y}$ .

- b) Gegeven zijn problemen  $\Pi_A$  en  $\Pi_B$  die beide tot de klasse NP behoren. Verder bestaat er een polynomiale-tijd transformatie van  $\Pi_A$  naar  $\Pi_B$ , dwz  $\Pi_A \propto \Pi_B$ .

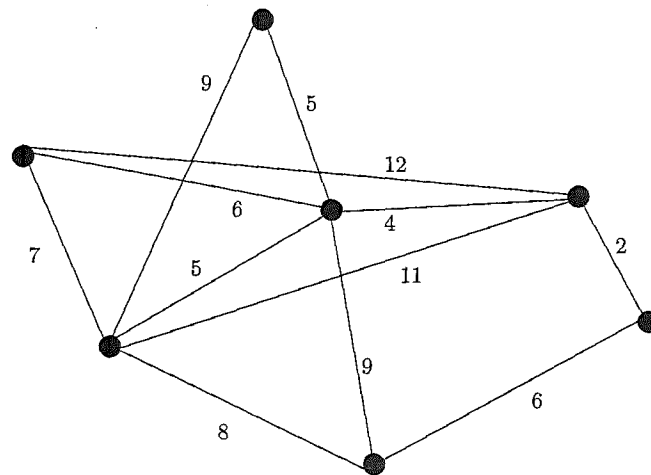
Beantwoord onderstaande vier vragen.

- (i) Probleem  $\Pi_A$  behoort tot P. Wat betekent dit voor probleem  $\Pi_B$ ?
- (ii) Probleem  $\Pi_A$  is NP-volledig. Wat betekent dit voor probleem  $\Pi_B$ ?
- (iii) Probleem  $\Pi_B$  behoort tot P. Wat betekent dit voor probleem  $\Pi_A$ ?
- (iv) Probleem  $\Pi_B$  is NP-volledig. Wat betekent dit voor probleem  $\Pi_A$ ?

4. Gegeven is een gerichte graaf  $G = (V, A)$ , een beginpunt  $s$  en een eindpunt  $t$ . De lengte van de gerichte kant  $(i, j)$  is gelijk aan  $l_{ij}$  en de capaciteit van de gerichte kant  $(i, j)$  is gelijk aan  $u_{ij}$ .

- Formuleer het probleem om het kortste pad van  $s$  naar  $t$  in  $G$  te bepalen, als een lineair optimaliseringsprobleem.
- Formuleer het probleem om de maximale stroom (max flow) van  $s$  naar  $t$  in  $G$  te bepalen, als een lineair optimaliseringsprobleem.
- In het primale simplexalgoritme is de zogenaamde *invariant* (iets dat geldt in elke iteratie) een primaal toegelaten oplossing, en in het duale simplexalgoritme is de invariant een duaal toegelaten oplossing. Welke zijn de invarianten in het primaal-duale algoritme?

5. Bepaal een kortste opspannende boom in de graaf gegeven in figuur 1. Gebruik hierbij het greedyalgoritme.



Figuur 1:

4

6.

a) Het probleem

$$\begin{array}{llllll} \min z = & -2x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 \\ \text{odv} & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 \leq 10 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 \geq 5 \\ & 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 \leq 10 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 \geq 0 \end{array}$$

is opgelost met behulp van het simplexalgoritme. Het verkregen tableau ziet er als volgt uit:

| basis | $\bar{b}$       | $x_1$           | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $e_2$          | $s_3$          |
|-------|-----------------|-----------------|-------|-------|-------|----------------|----------------|
| $-z$  | $-\frac{55}{4}$ | $-\frac{35}{4}$ | 0     | 0     | 0     | $-\frac{7}{4}$ | $-\frac{9}{4}$ |
| $s_1$ | $\frac{5}{4}$   | $-\frac{19}{4}$ | 0     | 0     | 1     | $-\frac{3}{4}$ | $-\frac{5}{4}$ |
| $x_2$ | $\frac{15}{4}$  | $\frac{3}{4}$   | 1     | 0     | 0     | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$  |
| $x_3$ | $\frac{5}{2}$   | $\frac{5}{2}$   | 0     | 1     | 0     | $\frac{1}{2}$  | $\frac{1}{2}$  |

Bepaal "Gomory cuts" van de laatste twee rijen van het simplextableau.

b) Stel dat je een geheeltallig *minimaliseringsprobleem* oplost met behulp van Branch-and-Bound.

i) Hoe kan je een bovengrens op de optimale waarde bepalen?

ii) Stel dat je in knoop  $j$  van de zoekboom bent. Wanneer mag je concluderen dat je niet verder hoeft te zoeken direct onder knoop  $j$ ?

De normering is als volgt:

1) 15 punten

2a) 10 punten    2b) 5 punten    2c) 8 punten

3a) 8 punten    3b) 8 punten

4a) 8 punten    4b) 8 punten    4c) 6 punten

5) 10 punten

6a) 6 punten    6b) 8 punten