

Tentamen Optimalisering (IN2805-I)

Datum: 3 april 2008, 14.00 – 17.00.

Docent: Dr. J.B.M. Melissen

Naam:**Studienummer:**

1 In deze opgave wordt vijftien maal telkens drie beweringen gedaan waarvan er één juist is. Kruis de juiste bewering aan. (2pt. per juist antwoord).

- ◇ De branch-and-bound methode is alleen toepasbaar voor het oplossen van BIP en IP problemen, maar niet voor LP problemen.
- ◇ De branch-and-bound methode is alleen toepasbaar voor het oplossen van BIP problemen, maar niet voor MIP en IP problemen.
- ◆ De branch-and-bound methode is toepasbaar voor het oplossen van zowel BIP, IP, MIP als LP problemen.

3 De branch-and-bound methode kan MIP problemen oplossen, dus in het bijzonder IP, BIP en LP, hoewel LP wel erg flauw is.

-
- ◆ Elk BIP probleem heeft een begrensd toegelaten gebied.
 - ◇ Elk BIP probleem heeft een begrensd toegelaten gebied, maar alleen als het aantal constraints minstens gelijk is aan het aantal variabelen plus 1.
 - ◇ Het toegelaten gebied van een BIP probleem kan onbegrensd zijn.

1 Een BIP probleem heeft eindig veel variabelen met elk twee mogelijkheden, dus altijd een begrensd toegelaten gebied.

Het bepalen van de kortste doorlooptijd van een project kan worden geformuleerd als

- ◇ een kortste pad probleem in een netwerk (met niet-negatieve lengtes).
- ◆ een langste pad probleem in een netwerk (met niet-negatieve lengtes).
- ◇ een toewijzingsprobleem.

2 Van alle paden van start naar finish bepaalt het langste pad de minimale doorlooptijd.

-
- ◆ De simplexmethode kan niet elk LP probleem in eindig veel stappen oplossen.
 - ◇ De simplexmethode vindt voor elk LP probleem een optimale oplossing, als deze bestaat.
 - ◇ Er bestaan LP problemen waarvoor de simplexmethode na n iteraties een optimale oplossing vindt, terwijl het aantal hoekpunten dat door de constraints wordt gedefinieerd kleiner is dan n .

1 De simplexmethode kan te maken krijgen met cycling en is dus in het algemeen niet eindig. Als er geen cycling optreedt wordt elk hoekpunt hooguit eenmaal bezocht en kan het aantal iteraties nooit groter zijn dan het aantal hoekpunten, dus 3 kan niet.

- ◇ Het aantal hoekpunten van het toegelaten gebied in een LP probleem met n variabelen en m beperkingen is hooguit $\binom{n}{m}$.
- ◇ Het aantal hoekpunten van het toegelaten gebied in een LP probleem met n variabelen en m beperkingen kan onbegrensd zijn.
- ◆ Het aantal hoekpunten van het toegelaten gebied in een LP probleem met n variabelen en m beperkingen is hoogstens $\binom{m}{n}$.

3 Een hoekpunt wordt bepaald door n constraints (n vergelijkingen met n onbekenden), dus een bovengrens is het aantal manieren waarop je n constraints uit het totaal van m kunt kiezen.

Het toevoegen van een constraint aan een LP probleem

- ◇ levert meer hoekpunten van het toegelaten gebied, dus meer iteraties in de simplexmethode.
- ◇ verandert de doelwaarde in het optimum.
- ◆ verandert de optimale oplossing van het duale probleem.

3 Door het toevoegen van een constraint kan de optimale oplossing veranderen, maar dat hoeft niet. Doordat het aantal constraints verandert, verandert wel het aantal variabelen in het duale probleem, dus ook altijd de optimale oplossing daarvan.

Met de PERT methode kan de kans op overschrijding van een deadline in een project worden gekwantificeerd. Een essentiële aanname hierbij is dat

- ◇ de duur van alle projectactiviteiten normaal is verdeeld.
- ◆ de projectactiviteiten onafhankelijk van elkaar zijn.
- ◇ het aantal paden door het projectnetwerk van begin- naar eind groot is ten opzichte van het aantal activiteiten.

2 De duur van elke activiteit is verdeeld volgens een Beta-verdeling, de activiteiten moeten statistisch onafhankelijk van elkaar zijn en het aantal activiteiten per pad is niet klein.

- ◆ Elke voorwaarde in een probleem met alleen binaire variabelen kan lineair worden geformuleerd.
- ◇ Elk IP probleem kan als een (groter) BIP probleem worden geformuleerd.
- ◇ In de optimale oplossing van een IP probleem met n variabelen wordt voor minstens n van de constraints gelijkheid aangenomen.

1 Zie sheets. Een IP probleem met een onbegrensd gebied kan nooit met alleen binaire variabelen worden geformuleerd, want dat heeft altijd een begrensd toegelaten gebied. Een IP p[robleem kan zelfs zonder constraints zijn: $\text{Min } 0 = 0x_1 + 0x_2$ dan is elk punt optimaal zonder dat gelijkheid wordt aangenomen.

De grootte van de stap in een iteratie van de simplexmethode hangt af van

- ◇ de doelwaarde in het huidige hoekpunt.
- ◇ getallen in de pivotkolom van het simplextableau.
- ◆ getallen in de pivotrij van het simplextableau.

3 De stapgrootte hangt af van (ratiotest) het pivot element en het rechterlid in de pivotrij, dus van twee getallen in de pivotrij.

Het vinden van een minimale opspannende boom in een netwerk.

- ◇ is een speciaal geval van een maximaal stromingsprobleem.
- ◆ kan worden geformuleerd als een BIP probleem.
- ◇ is een speciaal geval van een toewijzingsprobleem

2. Voer voor elke tak (i,j) een binaire variabele x_{ij} in. Minimaliseer de som van de variabelen vermenigvuldigd met de kosten per tak. De opspannende boom heeft $n-1$ takken als er n knopen zijn, dus de som van alle variabelen moet $n-1$ zijn. Er mogen geen cycles zijn, dus voor elke subset van k takken moet de som van de bijbehorende x -en hoogstens $k-1$ zijn.

- ◆ Een stuksgewijs lineaire doelfunctie in een LP probleem kan worden behandeld door invoering van extra binaire variabelen (het probleem wordt dan MIP).
- ◇ Een optimaliseringsprobleem met lineaire constraints en een stuksgewijs lineaire doelfunctie kan worden geformuleerd als een serie van LP problemen.
- ◇ Een stuksgewijs lineaire functie f bestaat uit twee lineaire gedeelten. De constraint $f(x) \leq c$ kan altijd worden vervangen door twee lineaire ongelijkheden.

1. Zie sheets. Bij 3: dit kan alleen als het bijbehorende gebied convex is, dus geen hap naar binnen.

Tijdens een iteratie van de simplexmethode wordt het rechterlid in een spilrij negatief.

- ◇ Het probleem is dan onbegrensd.
- ◇ Het probleem heeft dan geen toegelaten oplossing.
- ◆ Dit kan niet optreden.

3 De rechterleden kunnen nooit negatief worden, anders zou de huidige oplossing niet meer toelaatbaar zijn.

Een CPF oplossing van een LP probleem

- ◇ is altijd optimaal.
- ◆ voldoet aan alle constraints.
- ◇ bestaat altijd.

2. Een CPF hoeft niet altijd te bestaan en is zeker niet altijd optimaal. Het is wel een hoekpunt van het toegelaten gebied, dus voldoet aan alle constraints.

Het aantal optimale oplossingen van de LP relaxatie van een IP probleem

◇ is altijd groter dan of gelijk aan het aantal optimale oplossingen van het IP probleem.

◇ is altijd kleiner dan of gelijk aan het aantal optimale oplossingen van het IP probleem.

◆ kan groter dan of kleiner dan het aantal optimale oplossingen van het IP probleem zijn.

$$\begin{array}{ll} \text{3.} & \text{Max } x_1 \\ & \text{z.d.d. } x_1 \leq 1 \\ & \quad x_2 \leq 1 \\ & \text{en } x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Max } & x_1 \\ \text{z.d.d.} & 2x_1 + x_2 \leq 1 \\ \text{en} & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Bij het eerste probleem heeft het IP probleem 2 optimale oplossingen ((1,0) en (1,1)) en de LP relaxatie heeft er oneindig veel ($x_1 = 1$ en $0 \leq x_2 \leq 1$).

In het tweede probleem heeft het IP probleem 2 optimale oplossingen ((0,0) en (0,1)) en de LP relaxatie heeft er één ((0,5 , 0)).

Het aantal gerelaxeerde LP problemen dat bij de Branch-and-Bound aanpak voor een IP probleem met n variabelen moet worden opgelost is

◇ maximaal n.

◇ maximaal 2^{n+1} .

◆ mogelijk groter dan 2^{n+1} .

3. In tegenstelling tot bij een BIP probleem is er bij IP geen a-priori bovengrens voor hoe vaak je bij één variabele moet branchen, dus ook geen bovengrens.

2. Bekijk het volgende LP probleem:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & Z = 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \text{zodat} & -x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 10 \\ & 2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 5 \\ \text{en} & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

a. (3 pt.) Herschrijf dit LP probleem in de standaardvorm voor de simplexmethode.

b. (10 pt.) Los het probleem op met de simplexmethode.

c. (2 pt.) Hoeveel hoekpunten heeft het toegelaten gebied?

$$\begin{array}{ll} \text{2a.} & \text{Max } Z = 3x_1 + x_2 - 2x_3 - Mx_6 \\ & \text{zodat } -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ & \quad 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_5 + x_6 = 5 \\ & \text{en } x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

2b.

basis	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	ratio
	1	-3	-1	2	0	0	M	0	
x_4	0	-1	3	1	1	0	0	10	
x_6	0	2	-2	1	0	-1	1	5	

Veeg de basisvariabele x_6 uit de Z vergelijking:

basis	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	ratio
	1	-3-2M	-1+2M	2-M	0	M	0	-5M	
x_4	0	-1	3	1	1	0	0	10	
x_6	0	2	-2	1	0	-1	1	5	

x_1 kolom heeft de meest negatieve coëfficiënt, er is maar één ratio, x_1 komt in de basis, x_6 verlaat de basis

basis	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	ratio
	1	-3-2M	-1+2M	2-M	0	M	0	-5M	
x_4	0	-1	3	1	1	0	0	10	
x_6	0	2	-2	1	0	-1	1	5	5/2

Vegen:

basis	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	ratio
	1	0	-4	7/2	0	-3/2	3/2+M	15/2	
x_4	0	0	2	3/2	1	-1/2	1/2	25/2	
x_1	0	1	-1	1/2	0	-1/2	1/2	5/2	

x_2 komt in de basis, x_4 gaat eruit

basis	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	ratio
	1	0	-4	7/2	0	-3/2	3/2+M	15/2	
x_2	0	0	2	3/2	1	-1/2	1/2	25/2	25/4
x_1	0	1	-1	1/2	0	-1/2	1/2	5/2	

Vegen:

basis	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	ratio
	1	0	0	13/2	2	-5/2	5/2+M	65/2	
x_2	0	0	1	3/4	1/2	-1/4	1/4	25/4	
x_1	0	1	0	5/4	1/2	-3/4	3/4	35/4	

De spilkolom is nu bij x_5 , maar je kunt geen ratio's uitrekenen. Dit betekent dat het probleem onbegrensd is. Vanuit het huidige punt (35/4, 0, 0, 25/4, 0, 0) kun je x_5 onbegrensd laten stijgen. x_1 en x_2 zijn hier de basisvariabelen. Die kun je dus uitrekenen, terwijl x_5 stijgt en x_3 , x_4 en x_6 nul blijven. De vergelijkingen uit het laatste tableau leveren dan:

$$x_1 = 35/4 - 5/4x_3 - 1/2x_4 + 3/4x_5 - 3/4x_6 = 35/4 + 3/4x_5$$

$$x_2 = 25/4 - 3/4x_3 - 1/2x_4 + 1/4x_5 - 1/4x_6 = 25/4 + 1/4x_5$$

$$x_3 = 0$$

Deze oplossing voldoet aan de constraints en $Z = 65/2 + 5/2x_5$ is onbegrensd als x_5 stijgt.

2c. Het probleem heeft 3 variabelen en 5 constraints, dus er zijn 10 hoekpunten:

$x_1 = 0$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ (0,0,0) niet feasible

$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ (5/2,0,0) feasible

$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$ $x_1 = 0$ $x_3 = 0$ (0,-5/2,0) niet feasible

$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$ $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ (0,0,5) feasible

$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 10$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ (-10,0,0) niet feasible

$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 10$ $x_1 = 0$ $x_3 = 0$ (0,10/3,0) feasible

$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 10$ $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ (0,0,10) feasible

$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 10$ $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$ $x_3 = 0$ (15,25/2,0) feasible

$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 10$ $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$ $x_2 = 0$ (-5/3,0,25/3) niet feasible

$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 10$ $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$ $x_1 = 0$ (0,1,7) feasible

dus 6 toegelaten hoekpunten.

3. Een netwerk bestaat uit 4 knopen A, B, C en D en 5 takken AB, AC, CB, BD en CD. Op deze takken gelden capaciteitsgrenzen van 6, 3, 4, 4 en 5, respectievelijk.

- (6 pt.) Formuleer het maximale stromingsprobleem van knoop A naar knoop D als een LP probleem.
- (4 pt.) Formuleer het maximale stromingsprobleem van knoop A naar knoop D als een minimale kosten stromingsprobleem op een netwerk.

3a

$$\text{Max } x_{AB} + x_{AC}$$

$$\text{z.d.d. } x_{AB} + x_{CB} = x_{BD} \quad \text{stroombehoud in knoop B}$$

$$x_{AC} = x_{CB} + x_{CD} \quad \text{stroombehoud in knoop C}$$

$$x_{AB} \leq 6$$

$$x_{AC} \leq 3$$

$$x_{CB} \leq 4$$

$$x_{BD} \leq 4$$

$$x_{CD} \leq 5$$

$$\text{en } x_{AB}, x_{AC}, x_{CB}, x_{BD}, x_{CD} \geq 0$$

3b Geef alle takken kosten 0 en maak een extra tak zonder beperking van A naar C die duur is: kosten 1 (of 100000, maakt niet uit, alles is duur t.o.v. 0). Door het originele netwerk kan maximaal $6 + 3 = 9$ lopen. Laat nu meer, bijvoorbeeld 2305 eenheden door het nieuwe netwerk lopen. Nu zal de maximale hoeveelheid door het oude netwerk gaan (dat kost niets) en de rest langs de extra tak.

4. (10 pt.) Een prijswinnaar in een loterij wint vijf jaar vóór zijn pensioen een prijs van een miljoen euro. Hij wil dit geld zo beleggen dat hij zoveel mogelijk heeft op het moment hij met pensioen gaat. Er zijn drie mogelijke beleggingsvormen. Investering A heeft een looptijd van een jaar en geeft een rente van 4% en de minimale inleg per keer is 400,000 euro. Deze mogelijkheid kan alleen in het tweede, derde en vijfde jaar worden gebruikt. Bij mogelijkheid B moet het geld 3 jaar vast staan en is de rente na 3 jaar 10%. Bij mogelijkheid C is de looptijd 4 jaar en is de rente 20%. Deze mogelijkheid kan niet in het eerste jaar worden gebruikt en de maximale inleg is 200,000 euro.

Formuleer een lineair optimaliseringsmodel waarmee de winnaar zijn kapitaal na 5 jaar kan maximaliseren.

Lening A: Voer binaire variabelen x_{A2} , x_{A3} en x_{A5} in die zeggen of dit type lening wordt aangegaan voor jaar 2, 3, 5. Variabelen y_{A2} , y_{A3} , y_{A5} zijn de bedragen die worden ingezet. Modellleer nu de situatie met

$$y_{Ai} \geq 400000x_{Ai}$$

$$y_{Ai} \leq Mx_{Ai} \quad \text{voor } i = 2, 3, 5$$

Als $x_{Ai} = 0$, dan is $y_{Ai} = 0$, geen lening afsluiten, en als $x_{Ai} = 1$, dan is $y_{Ai} \geq 400000$.

Lening B: bedragen y_{B1} , y_{B2} , y_{B3}

Lening C: bedrag $y_{C2} \leq 200000$.

Aan het begin van jaar 1 is er 1000000 beschikbaar, dus

$$y_{B1} \leq 1000000.$$

Aan het begin van jaar 2 is er $1000000 - y_{B1}$ beschikbaar, dus

$$y_{A2} + y_{B2} + y_{C2} \leq 1000000 - y_{B1}$$

Aan het begin van jaar 3 is er $1000000 - y_{B1} - y_{A2} - y_{B2} - y_{C2} + 1,04 y_{A2}$ beschikbaar, dus

$$y_{A3} + y_{B3} \leq 1000000 - y_{B1} - y_{B2} - y_{C2} + 0,04 y_{A2}$$

In jaar 4 kunnen er geen leningen worden begonnen.

Aan het begin van jaar 5 is er $1000000 - y_{B1} - y_{B2} - y_{C2} + 0,04 y_{A2} - y_{A3} - y_{B3} + 1,04 y_{A3} + 1,1 y_{B1} + 1,1 y_{B2}$ beschikbaar, dus

$$y_{A5} \leq 1000000 - y_{C2} + 0,04 y_{A2} - y_{B3} + 0,04 y_{A3} + 0,1 y_{B1} + 0,1 y_{B2}$$

Aan het eind van jaar 5 is er beschikbaar:

$$1000000 - y_{C2} + 0,04 y_{A2} - y_{B3} + 0,04 y_{A3} + 0,1 y_{B1} + 0,1 y_{B2} - y_{A5} + 1,04 y_{A5} + 1,1 y_{B3} + 1,2 y_{C2} =$$

$$1000000 + 0,04 y_{A2} + 0,04 y_{A3} + 0,1 y_{B1} + 0,1 y_{B2} + 0,04 y_{A5} + 0,1 y_{B3} + 0,2 y_{C2}$$

dit moet gemaximaliseerd worden:

$$\text{Max } 0,04 y_{A2} + 0,04 y_{A3} + 0,1 y_{B1} + 0,1 y_{B2} + 0,04 y_{A5} + 0,1 y_{B3} + 0,2 y_{C2}$$

$$\text{z.d.d. } y_{A2} \geq 400000 x_{A2}$$

$$y_{A2} \leq M x_{A2}$$

$$y_{A3} \geq 400000 x_{A3}$$

$$y_{A3} \leq M x_{A3}$$

$$y_{A5} \geq 400000 x_{A5}$$

$$y_{A5} \leq M x_{A5}$$

$$y_{C2} \leq 200000$$

$$y_{B1} \leq 1000000$$

$$y_{A2} + y_{B2} + y_{C2} \leq 1000000 - y_{B1}$$

$$y_{A3} + y_{B3} \leq 1000000 - y_{B1} - y_{B2} - y_{C2} + 0,04 y_{A2}$$

$$y_{A5} \leq 1000000 - y_{C2} + 0,04 y_{A2} - y_{B3} + 0,04 y_{A3} + 0,1 y_{B1} + 0,1 y_{B2}$$

x variabelen zijn binair, alle variabelen ≥ 0

5. Een zwemcoach moet een team samenstellen voor de 4x100 meter wisselslag. Hij kan kiezen uit 5 zwemmers en de resultaten (tijden) van de selectiewedstrijden zijn als volgt:

zwemmer	1	2	3	4	5
rugslag	59	55	58	60	56
schoolslag	65	65	67	64	66
vlinderslag	57	54	56	56	56
vrije slag	51	49	50	52	51

- (2 pt.) Formuleer dit probleem als een toewijzingsprobleem.
- (8 pt.) Los dit probleem op met de Hongaarse methode.
- (2 pt.) Is het met de Hongaarse methode mogelijk om alle optimale oplossingen van een probleem te vinden, als er meer zijn? Leg uit.

5a. Voeg een dummyslag toe om de aantallen te balanceren

zwemmer	1	2	3	4	5
rugslag	59	55	58	60	56
schoolslag	65	65	67	64	66
vlinderslag	57	54	56	56	56
vrije slag	51	49	50	52	51
dummy slag	M	M	M	M	M

5b. Reductie over kolommen: $51 + 49 + 50 + 52 + 5$

Reductie over rijen: $5 + 12 + 4 + 0 + M$:

zwemmer	1	2	3	4	5
rugslag	3	1	3	3	0
schoolslag	2	4	5	0	3

vlinderslag	2	1	2	0	1
vrije slag	0	0	0	0	0
dummy slag	1	3	2	0	1

Nullen wegstrepen:

zwemmer	1	2	3	4	5
rugslag	3	1	3	3	0
schoolslag	2	4	5	0	3
vlinderslag	2	1	2	0	1
vrije slag	0	0	0	0	0
dummy slag	1	3	2	0	1

Reductie: 1

zwemmer	1	2	3	4	5
rugslag	2	0	2	3	0
schoolslag	1	3	4	0	3
vlinderslag	1	0	1	0	1
vrije slag	0	0	0	1	1
dummy slag	0	2	1	0	1

Toewijzing:

zwemmer	1	2	3	4	5
rugslag	2	0	2	3	0
schoolslag	1	3	4	0	3
vlinderslag	1	0	1	0	1
vrije slag	0	0	0	1	1
dummy slag	0	2	1	0	1

5c. Als een oplossing optimaal is, dan hoort daar in de laatste stap een toewijzing met nullen bij (anders is ie slechter). Andere oplossingen kun je dus vinden door in de laatste stap verschillende toewijzingen met nullen te vinden.

6. Gegeven is het volgende IP probleem:

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & Z = -3x_1 + 5x_2 \\ \text{z.d.d.} & 5x_1 - 7x_2 \geq 3 \\ \text{en} & 0 \leq x_j \leq 3 \text{ en } x_j \text{ is geheel voor } j = 1, 2.\end{array}$$

- (6 pts.) Los dit probleem op met het Branch-and-Bound algoritme. Los elk gerelaxeerd LP probleem op met de grafische methode.
- (3 pts.) Herformuleer het probleem als een BIP probleem.

6a De gerelaxeerde oplossing is $(3, 12/7)$. Branch nu op $x_2 \leq 1$ en $x_2 \geq 2$. De eerste geeft $(2, 1)$ en de andere is niet feasible, dus de optimale oplossing is $x_1 = 2, x_2 = 1, Z = -1$

6b laat $x_i = y_i + 2z_i$ met y_i en z_i binair.

7. Gegeven is een probleem met 5 geheeltallige niet-negatieve variabelen $x_1, \dots, x_5$. Geef van de volgende voorwaarden aan of en zo ja, hoe je ze als lineaire constraints kunt formuleren voor een IP probleem:

- (2 pt.) x_1 mag alleen de waarden 1, 2 en 4 aannemen.
- (2 pt.) Minstens één van de vijf variabelen moet de waarde 0 hebben.
- (2 pt.) $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = 11$.

7a. $x_1 = y_1 + 2y_2 + 4y_3$, met y_1, y_2, y_3 binair en $y_1 + y_2 + y_3 = 1$.

7b. $x_i \leq My_i$ met alle y_i binair en $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \leq 4$.

7c. Dit betekent dat één van de variabelen 11 is en de rest 1:
 $x_i = 1 + 10y_i$ met y_i binair en $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 1$.