

Tentamen Optimalisering (IN2520)

Datum: 30 juni 2004, 14.00 – 17.00.

Docent: Dr. J.B.M. Melissen

Veel succes!

1 Deze opgave bestaat uit 15 tweekeuzevragen. Per goed antwoord krijg je 2 punten. Toelichting geven mag maar hoeft niet en telt alleen in positieve zin mee.

- a. De branch-and-bound methode is alleen toepasbaar voor het oplossen van BIP en IP problemen, maar niet voor MIP problemen.

Onjuist! De continue variabelen in een gemengd probleem doen gewoon in de relaxatie en hoeven niet te worden “gebranched”.

- b. Elk BIP probleem heeft een begrensd toegelaten gebied.

Juist. Omdat alle variabelen binair zijn is het aantal mogelijkheden voor de variabelen eindig, dus begrensd.

- c. De simplexmethode vindt voor elk IP probleem in eindig veel stappen een optimale oplossing, als deze bestaat en er geen cycling optreedt.

Onjuist. De simplexmethode kan geen IP problemen oplossen, maar alleen LP problemen (instinker).

- d. Het algoritme van Dijkstra kan over het vinden van een kortste pad in een netwerk met n knopen n iteraties doen.

Juist. Het algoritme van Dijkstra vindt in elke iteratie een nieuwe knoop waarvoor de kortste afstand is bepaald. Het aantal iteraties is dus hoogstens n . In het simpele netwerk 1-2-...- n duurt het vinden van de kortste route tussen 1 en n inderdaad ook n iteraties.

- e. Het aantal hoekpunten van het toegelaten gebied in een LP probleem met n variabelen en m

beperkingen is hooguit $\binom{n}{m}$.

Onjuist. Het is $\binom{m}{n}$.

- f. De Hongaarse methode is een algoritme om toewijzingsproblemen op te lossen.

Juist.

- g. Een toewijzingsprobleem waarin het aantal taken niet gelijk is aan het aantal uitvoerders is niet goed geformuleerd. Dit kan worden gerepareerd door het invoeren van een dummy.

Onjuist. In een toewijzingsprobleem moet het aantal taken gelijk zijn aan het aantal uitvoerders. Het aantal dummies dat nodig is is dus het verschil tussen aantal uitvoerders en aantal taken (positief gerekend).

- h. De voorwaarde $x_1 = -1, 2$ óf 17 kan in een IP probleem worden geformuleerd met lineaire voorwaarden.

Juist. $x_1 = -y_1 + 2y_2 + 17y_3$, met y_1, y_2 , en y_3 binair en $y_1 + y_2 + y_3 = 1$.

- i. Bij de doelfunctie in een IP probleem wordt de term $f(x_1)$ opgeteld. Voor een willekeurige (niet-lineaire) functie f kan dit probleem toch worden geherformuleerd met een lineaire doelfunctie.

Onjuist. Dit is niet mogelijk, bijvoorbeeld als je één variabele hebt, dat is de doelfunctie net zo niet-lineair als f .

- j. Als in de simplexmethode de grootte van de stap die wordt gezet in de grootste stijgrichting onbegrensd is, dan is tijdens het uitvoeren van de methode een rekenfout gemaakt.

Onjuist. Het betekent alleen dat het probleem onbegrensd is.

- k. In de optimale oplossing van een maximaal stromingsprobleem op een netwerk met n knopen is de stroming in minstens 2 van de takken maximaal.

Onjuist. Dat kan er één zijn, bijvoorbeeld in het netwerk A - B.

- l. Als een BIP probleem met n variabelen wordt opgelost met het *branch-and-bound* algoritme is het aantal gerelaxeerde LP problemen dat moet worden opgelost minimaal n .

Onjuist. In het beste geval is de optimale oplossing van het gerelaxeerde LP probleem geheel en ben je met één relaxatie klaar.

- m. De schaduw prijzen van een LP probleem vormen de optimale oplossing van het primale probleem.

Onjuist. Ze zijn de optimale oplossing van het duale probleem.

- n. De verschilverzameling $A \setminus B = \{x | x \in A, x \notin B\}$ van twee convexe verzamelingen A en B is niet altijd convex.

Juist. Een convexe hap uit een convexe verzameling kan een niet-convexe verzameling opleveren.

- o. In een minimaal kostenstromingsprobleem op een netwerk hebben alle beperkingen (boven- en ondergrenzen) op de takken gehele waarden. Er is dan altijd een gehele optimale oplossing.
 Onjuist. De in- en uitvoerwaarden kunnen niet-geheeltallig zijn, vb. $\frac{1}{2} \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow \frac{1}{2}$ en bovengrens ≤ 1 op tak $A \rightarrow B$. Dit kan alleen maar een stroming $\frac{1}{2}$ opleveren.

2. Bekijk het volgende LP probleem:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & Z = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \text{zodat} & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ & x_1 + x_3 = 5 \\ \text{en} & x_1, x_2 \geq 0, x_3 \geq -1 \end{array}$$

- a. (5 pt.) Herschrijf dit LP probleem in de standaardvorm voor de simplexmethode.
 b. (15 pt.) Los het probleem op met de simplexmethode.
 c. (5 pt.) Elimineer x_3 en los het LP probleem op met de grafische methode.

a. Het probleem staat nog niet in de standaardvorm, want er is een gelijkheid en er is geen ≥ 0 ongelijkheid voor x_3 . Dit laatste kan worden opgelost door het invoeren van een nieuwe variabele $x_3' = x_3 + 1 \geq 0$. Na introduceren van extra variabelen wordt de standaardvorm nu:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & Z = x_1 + x_2 - 2x_3' - Mx_5 + 2 \\ \text{zodat} & x_1 + x_2 + 2x_3' + x_4 = 10 \\ & x_1 + x_3' + x_5 = 6 \\ \text{en} & x_1, x_2, x_3', x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

b. Simplex tableau:

basis	Z	x_1	x_2	x_3'	x_4	x_5	RL	
	1	-1	-1	2	0	M	2	
x_4	0	1	1	2	1	0	10	
x_5	0	1	0	1	0	1	6	

Omdat de vergelijking voor Z geen basisvariabelen mag bevatten, moet eerst de term M onder x_5 worden weggewerkt:

basis	Z	x_1	x_2	x_3'	x_4	x_5	RL	ratio
	1	-M+1	-1	-M+2	0	0	-6M+2	
x_4	0	1	1	2	1	0	10	10
x_5	0	1	0	1	0	1	6	6

De meest negatieve coëfficiënt is $-M-1$, de ratio bij x_5 is het kleinste, dus x_5 gaat uit de basis, x_1 gaat erin. Vegen levert:

basis	Z	x_1	x_2	x_3'	x_4	x_5	RL	ratio
	1	0	-1	3	0	M+1	8	
x_4	0	0	1	1	1	-1	4	4
x_1	0	1	0	1	0	1	6	-

De meest negatieve coëfficiënt is -1 . x_4 gaat uit de basis, x_2 gaat erin. Na vegen is het tableau dan:

basis	Z	x_1	x_2	x_3'	x_4	x_5	RL	
	1	0	0	4	1	M	12	
x_2	0	0	1	1	1	-1	4	
x_1	0	1	0	1	0	1	6	

Alle coëfficiënten zijn niet-negatief. Geen verbetering mogelijk. Optimale oplossing is: $x_1 = 6$, $x_2 = 4$, rest = 0, dus in het oorspronkelijke probleem: $x_1 = 6$, $x_2 = 4$, $x_3 = -1$, $Z = 12$.

c. Omgeschreven ($x_3 = 5 - x_1$) wordt het probleem nu:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & Z = 3x_1 + x_2 - 10 \\ \text{zodat} & -x_1 + x_2 \leq -2 \\ & x_1 \leq 6 \\ \text{en} & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Dit levert een driehoekig gebied met hoekpunten (2,0), (6,0) en (6,4). De optimale oplossing is $x_1 = 6$, $x_2 = 4$ (en dus $x_3 = -1$) en $Z = 12$.

3. In een fabriek moet een hoeveelheid hete vloeistof met zo weinig mogelijk temperatuurverlies van tank A naar tank E worden overgepompt via één of meer andere tanks. Tijdens het overpompen tussen tanks treedt er een temperatuurverlies van vloeistof op. De verliespercentages staan in de onderstaande tabel:

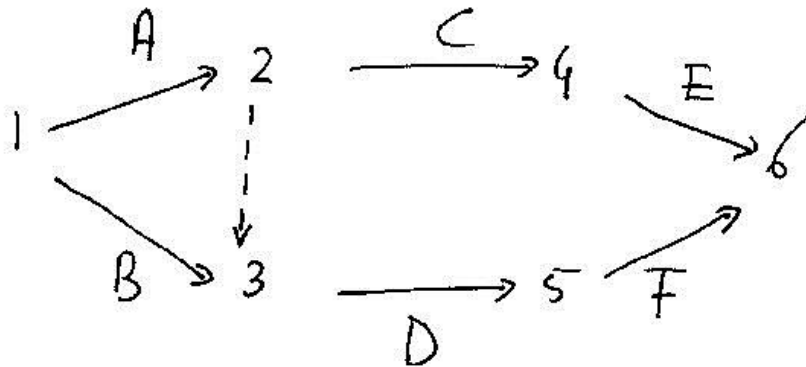
Van \ Naar	A	B	C	D	E
A	-	2	1	3	-
B	2	-	4	-	3
C	4	1	-	3	5
D	7	4	2	-	2

- (4 pt.) Leg uit waarom de doelfunctie in dit probleem niet-lineair is.
- (3 pt.) Leg uit hoe de doelfunctie lineair gemaakt kan worden.
- (8 pt.) Los dit probleem op met het algoritme van Dijkstra of met behulp van dynamisch programmeren.

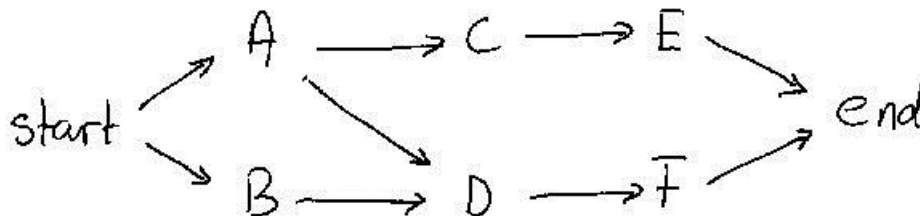
4. Een project bestaat uit 6 activiteiten. Het project kan worden voorgesteld als een netwerk met 6 knopen, waarin de activiteiten op de takken staan. Deze zijn: (1,2), (2,4), (4,6), (1,3), (3,5), (5,6). Er is een dummy-activiteit (2,3) ingevoerd.

- (2 pt.) Teken het netwerk. Wat is de functie van de dummy-activiteit?

De dummy-activiteit zorgt ervoor dat activiteit 3-5 na 1-2 plaatsvindt (en niet om de toegankelijkheid van het netwerk te vergroten of de doorstroming te verbeteren, of om het netwerk te ontlasten).



- (3 pt.) Teken dit project in een netwerk waarbij de activiteiten als knopen gedefinieerd zijn.



- (5 pt.) De gegevens van de deelactiviteiten staan in de volgende tabel:

Activiteit	Normale duur	Crashduur	Normale kosten	Crashkosten
A: 1 → 2	6	4	4200	6200
B: 1 → 3	2	1	1800	3300
C: 2 → 4	4	2	5400	8000
D: 3 → 5	5	3	3600	5800
E: 4 → 6	7	4	5900	9500
F: 5 → 6	9	6	6300	8700

Bereken de minimale doorlooptijd van het project (zonder crashen) en het vroegste en laatste tijdstip waarop de activiteiten kunnen starten.

	Earliest start	Earliest finish	Latest start	Latest finish
A	0	6	0	6
B	0	2	4	6
C	6	10	9	13
D	6	11	6	11
E	10	17	13	20

F	11	20	11	20
End	20			

Doorlooptijd is minimaal 20 weken.

d. (5 pt.) Formuleer een LP model waarmee het project op de goedkoopst mogelijke manier in uiterlijk 13 weken kan worden afgerond.

Activiteit	Normale duur	Crashduur	aantal weken korter	Normale kosten	Crashkosten	marginale crashkosten
A: 1 → 2	6	4	2	4200	6200	1000
B: 1 → 3	2	1	1	1800	3300	1500
C: 2 → 4	4	2	2	5400	8000	1300
D: 3 → 5	5	3	2	3600	5800	1100
E: 4 → 6	7	4	3	5900	9500	1200
F: 5 → 6	9	6	3	6300	8700	800

Laat x_X de starttijd van activiteit X zijn en y_X het aantal weken waarmee de duur van activiteit X is verkort. Dan moet

Min $1000y_A + 1500y_B + 1300y_C + 1100y_D + 1200y_E + 800y_F$

z.d.d. $6 - y_A \leq x_C$,

$2 - y_B \leq x_D$, $6 - y_A \leq x_D$,

$x_C + 4 - y_C + 7 - y_E \leq 13$,

$x_D + 5 - y_D + 9 - y_F \leq 13$,

$y_A \leq 2$, $y_B \leq 1$, $y_C \leq 2$, $y_D \leq 2$, $y_E \leq 3$, $y_F \leq 3$,

en $x_C, x_D, y_A, y_B, y_C, y_D, y_E, y_F \geq 0$.

(voor het gemak zijn een paar overbodige variabelen zoals x_A weggelaten)

Oplossing: A, D en E worden 2 weken verkort en F 3 weken. Total;e kosten: 9000 euro.

5. Een aannemer moet voor het komende jaar beslissen welke van de hem aangeboden projecten hij zal uitvoeren. Daarbij heeft hij de keuze tussen zelf uitvoeren en het werk laten uitvoeren door onderaannemers. De vijf projecten die hem worden aangeboden vergen resp. 855, 1440, 900, 1260 en 1070 arbeidsuren. De aannemer heeft zelf 4320 arbeidsuren ter beschikking en bij de onderaannemers zijn voldoende uren beschikbaar. De aannemer maakt op de projecten een winst van resp. 11000, 22000, 28600, 19800 en 33000 euro winst als hij ze zelf uitvoert, en 2200, 4950, 8800, 9900 en 6600 euro winst bij uitbesteding.

- (6 pt.) Stel een IP model op waarmee de aannemer kan uitrekenen op welke manier hij zijn winst kan maximaliseren.
- (4 pt.) Leg in detail uit hoe je dit probleem het beste zou kunnen oplossen (zonder alle mogelijkheden op te schrijven). Je hoeft de oplosmethode niet uit te voeren.