

Tentamen Optimalisering (WI 2520 IN)

Datum: 23 juni 2004, 14.00 – 17.00.

Docent: Dr. J.B.M. Melissen

Veel succes!

1. (15 pt.) Een LP probleem in 3 variabelen heeft 4 constraints. Het mogelijke aantal optimale oplossingen van zo'n probleem is (meer antwoorden mogelijk):

- a. 0
- b. 1
- c. 2
- d. 3
- e. 4
- f. Oneindig

- a. Juist (leeg feasible gebied, bijvoorbeeld $x_1 \leq 2, x_1 \geq 4$).
- b. Juist (voorbeeld: Maximaliseer x_1 met $x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$).
- c. Niet juist. Als er twee optimale oplossingen zijn, zijn er meteen oneindig veel, omdat een convexe combinatie het ook altijd is.
- d. Idem
- e. Idem
- f. Juist (voorbeeld: Minimaliseer x_1 met $x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$).

2. (15 pt.) In een LP probleem zijn alle coëfficiënten van de doelfunctie en ook alle coëfficiënten en rechterleden van alle constraints geheeltallig. Het LP probleem heeft een unieke optimale oplossing. Omdat het om aantallen gaat wil men zeker weten dat men een geheeltallige optimale oplossing krijgt en lost het probleem voor alle zekerheid op als een IP probleem. Welke van de volgende uitspraken is juist (meer antwoorden mogelijk):

- a. Er is altijd een unieke optimale geheeltallige oplossing van dit IP probleem.
- b. Er is mogelijk geen optimale gehele oplossing.
- c. Er is mogelijk meer dan één optimale gehele oplossing.
- d. Er zijn mogelijk oneindig veel optimale gehele oplossingen.

- a. Niet juist, zie bijvoorbeeld b.
- b. Juist, bijvoorbeeld met de constraint $2x = 1$ in één dimensie..
- c. Juist. Bijvoorbeeld maximaliseer x met $4x + y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0$. LP geeft (0.5, 0) en IP geeft (0,0), (1,0) en (2,0)
- d. Niet juist.

3 Beschouw het volgende LP probleem wordt:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & Z = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \\ \text{zodat} & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 \\ & 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 11 \\ \text{en} & x_1, x_2, x_4 \geq 0. \end{array}$$

- a. (5 pt.) Herschrijf dit LP probleem in de standaardvorm.
- b. (10 pt.) Lost het probleem op met de simplexmethode

- c. (5 pt.) Beargumenteer waarom je x_4 gelijk aan 0 kunt nemen (Hint: gebruik x_3 om eventueel x_4 te verkleinen). Gebruik de gelijkheidsconstraint om vervolgens één variabele te elimineren. Los het ontstane probleem op met de grafische methode.

a. Het probleem mist een niet-negativiteitsconstraint voor x_4 . Voer in: $x_4 = x_4^+ - x_4^-$, met $x_4^+, x_4^- \geq 0$. Voor de eerste constraint moet een slackvariabele worden ingevoerd. De tweede (gelijkheids)constraint heeft twee extra variabelen.

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & Z = x_1 + x_2 + x_3 - x_4^+ + x_4^- - Mx_5 \\ \text{zodat} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\ & 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4^+ + x_5 = 11 \\ \text{en} & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{array}$$

c. De doelfunctie verandert niet als je x_4 verkleint en tegelijkertijd x_3 evenveel verkleint. Dat laatste mag omdat de eerste ongelijkheidsconstraint blijft gelden, de gelijkheidsconstraint blijft waar en er is geen ondergrens voor x_3 . Je kunt dus bereiken dat $x_4 = 0$. Het probleem wordt nu:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & Z = x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{zodat} & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 \\ & 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 11 \\ \text{en} & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

Elimineer met de gelijkheidsconstraint x_3 :

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & Z = 4x_1 + 5x_2 - 11 \\ \text{zodat} & 4x_1 + 6x_2 \leq 15 \\ \text{en} & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

Grafisch oplossen levert: $x_1 = 15/4$, $x_2 = 0$ ($x_3 = 1/4$, $x_4 = 0$), objectwaarde = 4

4 Drie broers erven van hun vader n kunstvoorwerpen met waarden c_i ($i = 1..n$). De totale waarde van de objecten is C ($= c_1 + c_2 + \dots + c_n$). Ze willen deze kunstvoorwerpen onderling zó verdelen dat iedereen zoveel mogelijk dezelfde totale waarde krijgt (als een kunstvoorwerp wordt gedeeld wordt de waarde van de delen 0).

- a. (5 pt.) Formuleer dit probleem als een lineair optimaliseringsprobleem met binaire variabelen.
b. (5 pt.) In het algemeen zal niet elk van de broers $C/3$ aan waarde kunnen krijgen. Is er een constante $0 < \alpha < 1/3$ zodat elke broer in ieder geval minstens αC aan waarde krijgt? Zo ja geeft zo'n α . Zo nee geef een voorbeeld waar dit mis gaat.

a. Voer binaire variabelen x_{ij} in waarbij $x_{ij} = 1$ als object i naar broer j gaat. De constraints $x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} = 1$ ($i = 1..n$) zorgen dat elk object maar naar één broer gaat.. Broer j krijgt $c_1x_{1j} + \dots + c_nx_{nj}$. Geen van deze bedragen mag te hoog worden. We voeren dus de constraints $c_1x_{1j} + \dots + c_nx_{nj} \leq x$ in en we gaan x minimaliseren:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x \\ \text{z.d.d.} & x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} = 1 \quad (i = 1..n) \\ & c_1x_{1j} + \dots + c_nx_{nj} \leq x \quad (j = 1..3) \\ \text{en} & x_{ij} \text{ is binair} \end{array}$$

b. Nee, als er bijvoorbeeld maar één object is, dan krijgt één broer C , en de andere twee 0.

5 Een aannemer heeft in de komende vijf weken respectievelijk 5, 7, 8, 4 en 6 tegelzetters nodig. Elke week kan hij besluiten om tegelzetters te ontslaan of om nieuwe aan te nemen. In elke week dat er nieuw personeel wordt aangesteld zijn er vaste kosten van € 400 plus € 200 per nieuwe tegelzetter. Een tegelzetter die in dienst is, maar niet wordt ingezet kost € 300 per week.

- a. (8 pt.) Bepaal met behulp van dynamisch programmeren een optimale strategie voor het aannemen en ontslaan van tegelzetters.

b. (7 pt.) Formuleer het probleem van de aannemer als een kortste pad probleem en los het op met het algoritme van Dijkstra.

6. Je weet door een inside-tip dat bij een paardenrace één van de volgende drie paarden zeker gaat winnen: Rupert the Rocket, Lazy Joe en Old Nag. De uitbetaling is respectievelijk 2, 3 en 9 euro per ingelegde euro. Je hebt 170 euro en wilt die zodanig inzetten dat het bedrag dat je minimaal uitbetaald krijgt zo groot mogelijk is.

a. (6 pt.) Formuleer dit probleem als een lineair maximaliseringsprobleem (Hint: Noem de minimale uitbetaling u en schrijf ongelijkheden voor u op.

b. (4 pt.) Laat zien dat er een inzet is waarmee je in ieder geval 180 euro terugkrijgt.

c. (5 pt.) Hoe verandert het model als je de gemiddelde opbrengst wilt maximaliseren, met de verwachting dat de winstkans voor de drie paarden gelijk is?

6a. Noem het uitbetaalde bedrag u , en het geld geïnvesteerd in Rupert the Rocket, Lazy Joe en Old Nag respectievelijk r , l , o , dan is het probleem:

$$\text{Max } u$$

$$\text{z.d.d. } r + l + o \leq 170$$

$$2r \geq u$$

$$3l \geq u$$

$$9o \geq u,$$

$$r, l, o \geq 0$$

De laatste drie constraints geven aan wat er uitbetaald wordt als één van de drie paarden wint.

6b. Door de ongelijkheden te combineren krijg je dat

$$\frac{u}{2} + \frac{u}{3} + \frac{u}{9} \leq 170, \text{ ofwel } \frac{17}{18}u \leq 170, \text{ dus } u \leq 180. \text{ Deze waarde kun je krijgen door te nemen}$$

$$r = u/2 = 90, l = u/3 = 60, o = u/9 = 20.$$

6c. Het verwachte uit te betalen bedrag is $(r^2 + 3l + 9o)/3$, dus het model wordt:

$$\text{Max } (r^2 + 3l + 9o)/3$$

$$\text{z.d.d. } r + l + o \leq 170$$

$$r, l, o \geq 0.$$

De optimale oplossing is dan om alles op Old Nag te zetten: $o = 170$, de verwachte opbrengst is $170 \cdot 9/3 = 510$ euro.