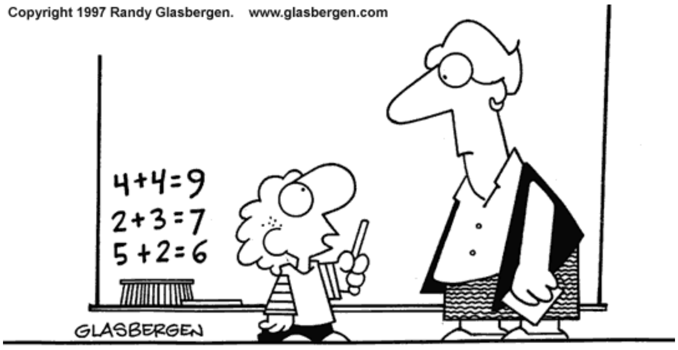
Tentamen Optimalisering (WI 2520 IN)
Datum: 31 oktober 2003, 14.00 – 17.00.
Docent: Dr. J.B.M. Melissen
Begin elke opgave op een nieuw blad! Elke vraag is 15 punten waard. Je krijgt 10 punten voor het invullen van de enquête over het boek. Eindcijfer is het totale aantal punten gedeeld door 10.
Veel succes!

1 Geef van elk van de volgende uitspraken aan of hij/zij waar of onwaar is (elk 2 pt.).



"My generation will be running the world soon. If we say 4+4=9 then that's the way it's going to be!"

a. De simplexmethode kan constateren of een probleem onbegrensd is.
b. De simplexmethode is toepasbaar voor continue (LP) en geheeltallige lineaire problemen (IP), maar niet voor gemengde problemen (MIP).
c. Uit de optimale oplossing van een LP probleem kun je eenvoudig de schaduwprijzen berekenen.
d. Als in elke stap van de simplexmethode de doelwaarde niet verslechtert kan er geen cycling (oneindige loop) optreden.
e. Een geheeltallig transportprobleem, waarin alle aanbod- en vraaghoeveelheden geheel zijn, is op te lossen met de simplexmethode
f. Door het vervangen van voorwaarden in een geheeltallig optimaliseringsprobleem door equivalente voorwaarden kan de oplossing hiervan versneld worden.
g. Als de coëfficiëntenmatrix van de nevenvoorwaarden in een LP probleem unimodulair is, dan is de oorsprong (alle variabelen gelijk aan 0) altijd een toegelaten oplossing.
h. Een IP probleem met begrensd toelaatbaar gebied is te herschrijven als BIP probleem.

a. Juist, je vindt dan geen bovengrens voor de intredende basisvariabele.
b. Niet juist, want de simplex methode werkt alleen voor continue LP problemen.
c. Niet juist. De schaduwprijzen zijn de optimale oplossing van het duale probleem. De simplex methode geeft deze direct, maar uit alleen de optimale oplossing zijn ze niet te berekenen.
d. Niet juist, de doelwaarde kan gelijk blijven, waardoor cycling kan optreden.
e. Juist. Een transportprobleem heeft de geheeltalligheidseigenschap, d.w.z., de simplex methode vindt voor het gerelaxeerde probleem een geheeltallige optimale oplossing. Dat is dus ook een optimale oplossing voor het originele probleem.
f. Juist. Als de kans toeneemt dat hoekpunten van het toegelaten gebied geheeltallig worden zal de simplexmethode op het gerelaxeerde probleem eerder met geheeltallige oplossingen komen en betere bovengrenzen, dat versnelt ook de branch-and-bound methode.
g. Onjuist. Dit slaat helemaal nergens op.
h. Juist. Elke variabele is begrensd en is dus lineair te herschijven (als binaire ontwikkeling) met eindig veel binaire variabelen.

2a. (4 pt.) x_1 en x_2 zijn binaire variabelen. In een model komt de niet-lineaire term x_1x_2 voor. Laat zien dat je deze term kunt vervangen door een binaire variabele y die voldoet aan: $y \leq x_1$, $y \leq x_2$, $y \geq x_1 + x_2 - 1$.
b. (2 pt.) In een lineair maximaliseringsprobleem zijn alle variabelen geheel. De doelfunctie heeft als bovengrens 3,1415. Kun je nu concluderen dat ook 3 een bovengrens is? Waarom?
c. (4 pt.) De variabelen x_1, x_2 en x_3 zijn binair. Vervang de voorwaarde $3x_1 + 8x_2 - 2x_3 \leq 5$ door een zo eenvoudig mogelijke.

d. (5 pt.) De variabelen x_1, x_2 en x_3 zijn binair. De doelfunctie in een optimaliseringsprobleem is gegeven als

$$Z = \begin{cases} x_2 + 3x_3 & \text{als } x_1 = 0, \\ -x_2 & \text{als } x_1 = 1. \end{cases}$$

Laat zien hoe je door invoering van nieuwe variabelen en lineaire voorwaarden deze functie lineair kunt formuleren (hint: gebruik a).

2a. Dit kun je eenvoudig nagaan door de vier mogelijke combinaties voor x_1 en x_2 te controleren.
b. Dat kun je niet concluderen, want de doelfunctie kan niet-geheeltallige coëfficiënten hebben.
c. De variabele x_2 kan niet gelijk aan 1 zijn, want de minimale waarde van $3x_1 – 2x_3$ is –2, en daarmee komt het linkerlid niet onder de 5. Gevolg: $x_2 = 0$. Over blijft de voorwaarde $3x_1 – 2x_3 \leq 5$, maar die voorwaarde is altijd vervuld, dus voegt niets toe. De ongelijkheid kan dus worden vervangen door de gelijkheid $x_2 = 0$.
d. De eerste stap is om de twee vormen in één te vatten door gebruik te maken van het feit dat vermenigvuldigen met x_1 wel of niet een term oplevert:
$Z = x_2 – 2x_1x_2 + 3(1-x_1)x_3 = x_2 +3x_3 – 2x_1x_2 – 3x_1x_3$
Voer nu binaire variabelen x_4 en x_5 in voor de termen x_1x_2 en x_1x_3, dan is
$Z = x_2 +3x_3 – 2x_4 – 3x_5$
en $x_4 \leq x_1$, $x_4 \leq x_2$, $x_4 \geq x_1 + x_2$, $x_5 \leq x_1$, $x_5 \leq x_3$ $x_5 \geq x_1 + x_3 –1$.

3 Een LP probleem wordt omgeschreven in de standaardvorm voor de simplexmethode en ziet er dan als volgt uit:

Max	$Z = x_1 + x_2^+ + x_2^- - M\underline{x}_3$
zodat	$x_1 + 2x_2^+ + 2x_2^- + \underline{x}_3 = 4$
	$3x_1 + 4x_2^+ + 4x_2^- + x_4 = 11$
en	$x_1, x_2^+, x_2^-, \underline{x}_3, x_4 \geq 0.$

a. (3 pt.) Schrijf de originele vorm van dit LP probleem op.
b. (12 pt.) Los het bovenstaande probleem met de simplexmethode op.

3a.

Max	$Z = x_1 + x_2$
zodat	$x_1 + 2x_2 = 4$
	$3x_1 + 4x_2 \leq 11$
en	$x_1 \geq 0.$

b.
$Z = x_1 + x_2^+ + x_2^- - M\underline{x}_3$
$x_1 + 2x_2^+ + 2x_2^- + \underline{x}_3 = 4$
$3x_1 + 4x_2^+ + 4x_2^- + x_4 = 11$

Basisvariabelen zijn $\underline{x}_3$ en x_4. Maak Z door vegen onafhankelijk van basisvariabele $\underline{x}_3$:
$Z = (M+1)x_1 + (2M+1)x_2^+ + (2M+1)x_2^- - 4M$
$x_1 + 2x_2^+ + 2x_2^- + \underline{x}_3 = 4$
$3x_1 + 4x_2^+ + 4x_2^- + x_4 = 11$

Sterkste stijging in x_2^+ richting (ook in x_2^-, maar pak de eerste), dus x_2^+ wordt basisvariabele.
$2x_2^+ + \underline{x}_3 = 4$ en $\underline{x}_3 \geq 0$, dus $x_2^+ \leq 2$
$4x_2^+ + x_4 = 11$ en $x_4 \geq 0$, dus $x_2^+ \leq 2.75$.

Gevolg: $\underline{x}_3$ wordt 0 en gaat uit de basis. Vegen levert nieuw stelsel:
$Z = 0.5x_1 – (M+0.5)\underline{x}_3 + 2$
$0.5x_1 + x_2^+ + x_2^- + 0.5\underline{x}_3 = 2$

$x_1 - 2\underline{x}_3 + x_4 = 3$

De enige positieve coëfficiënt in de Z vergelijking is die voor x_1, dus x_1 wordt basisvariabele.
$0.5x_1 + x_2^+ = 2$ en $x_2^+ \geq 0$, dus $x_1 \leq 4$
$x_1 + x_4 = 3$ en $x_4 \geq 0$, dus $x_1 \leq 3$

Gevolg: x_4 wordt 0 verlaat de basis. Vegen levert:
$Z = -(M-0.5)\underline{x}_3 - 0.5x_4 + 3.5$
$x_2^+ + x_2^- + 1.5\underline{x}_3 - 0.5x_4 = 0.5$
$x_1 - 2\underline{x}_3 + x_4 = 3$

Nu is geen verbetering mogelijk. Oplossing: $x_1 = 3$ en $x_2^+ = 0.5$, $x_2^- = \underline{x}_3 = x_4 = 0$, $Z = 3.5$.
Dit betekent $x_1 = 3$, $x_2 = 0.5$, $Z = 3.5$.

4 In een computernetwerk moeten 7 servers met elkaar worden verbonden. Men wil dit doen door twee hubs (tussenknopen) te plaatsen die met elkaar verbonden zijn. Elke server wordt dan met één van de hubs verbonden, de communicatie tussen servers verloopt altijd via één of twee hubs. Voor de hubs zijn 4 mogelijke locaties geselecteerd. De aanlegkosten van een link tussen server en hub is *a* euro per kilometer, de link tussen de twee hubs kost *b* euro per kilometer. De afstand in kilometers van server i naar hub-positie j is d_{ij} (i = 1,…,7 en j = 1,…,4). De afstand tussen hub-positie i en hub-positie j is D_{ij} (i = 1,…,4 en j = 1,…,4).

"I can suck pudding up my nose and blow it out the corner of my eye, but they *still* won't put me in the gifted class at school!"

a. (7 pt.) Formuleer een lineair model met binaire variabelen waarmee de lay-out met minimale aanlegkosten kan worden bepaald.
b. (2 pt.) Stel dat het goedkoper zou zijn om met één hub te werken, in plaats van met twee. Kan het model uit a deze oplossing geven?
c. (2 pt.) Leg uit waarom er altijd/vaak/nooit een optimale oplossing van dit probleem bestaat.
d. (2 pt.) Leg uit waarom er altijd/vaak/nooit een unieke optimale oplossing van dit probleem bestaat.
e. (2 pt.) De positie van de hubs wordt nu niet beperkt door de geselecteerde posities, maar is volkomen vrij. Leg uit waarom dit probleem niet als een MIP is te formuleren.

5 Een softwareproject bevat de deeltaken A, B, C, D, E en F. A moet vooraf gaan aan B, D en E kunnen pas gedaan worden als B en C af zijn en F baseert zich op D en E. De duur van de deeltaken A, B, …, F is: 7, 4, 12, 8, 7 en 5 weken.

a. (2 pt.)Teken de taken in een graaf met afhankelijkheden als gerichte takken.
b. (5 pt.) Bepaal het kritische pad en de kortste doorlooptijd van het project.
c. (8 pt.) Het project moet twee weken "gecrashed" (verkort) worden door deeltaken te versnellen. A kan maximaal 1 week worden verkort (of een gedeelte), kosten per week zijn 7 duizend euro. C kan 3 weken korter tegen 8 duizend euro per week, D kan 2 weken korter, kosten 12 duizend euro per week. E kan 2 weken korter, kost 14 duizend euro per week. F kan 1 week korter, kost 10 duizend euro per week. Stel een LP model op waarmee kan worden bepaald welke deeltaken hoeveel moeten worden ingekort om de kosten minimaal te houden. Gebruik hiervoor de variabelen x_j (j=A, B, …) als de hoeveelheid tijd dat taak j wordt ingekort en y_j voor de starttijd van taak j.

6 Een vliegtuig moet een vlucht uitvoeren van stad A naar stad G, waarbij twee tussenlandingen moeten worden gemaakt. De eerste in stad B, C of D en de tweede in stad E of F. In de onderstaande tabel staan de vliegafstanden.

Van\Naar	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
A	26	21	32	-	-	-
B	-	-	-	10	12	-
C	-	-	-	17	21	-
D	-	-	-	7	8	-
E	-	-	-	-	-	20
F	-	-	-	-	-	22

a. (4 pt.) Bepaal met het algoritme van Dijkstra de kortste vliegroute van A naar G.
b. (3 pt.) Leg uit hoe je dit kortste pad probleem kunt formuleren als een minimale kostenstromingsprobleem.
c. (8 pt.) Men wil nu kleinere vliegtuigen inzetten met een beperkte brandstofcapaciteit. Bepaal met dynamisch programmeren de vliegroute van A naar G waarbij de grootste afstand die in één keer vliegen wordt afgelegd minimaal is, en die vervolgens ook de kortste lengte heeft.

6a.

A						
B	(26,A)	(26,A)*				
C	(21,A)*					
D	(32,A)	(32,A)	(32,A)*			
E	(∞,-)	(38,C)	(36,B)	(36,B)*		
F	(∞,-)	(42,C)	(38,B)	(38,B)	(38,B)*	
G	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(56,E)	(56,E)*

De kortste route is dus $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow G$ met lengte 56.

6b. Neem als kosten op de takken de afstand. Knoop A is een bron waar 1 eenheid in gaat, en bij G gaat er 1 eenheid uit.

6c.