

Tentamen IN3105

Complexiteitstheorie

22 juni 2009, 9.00 – 12.00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 10 meerkeuzevragen, 5 korte (open) vragen en 2 open vragen.
- Per meerkeuzevraag kunnen 0 tot 4 alternatieven juist zijn.
- Voor de meerkeuzevragen kunt u maximaal 50 punten behalen, voor de korte open vragen maximaal 30 punten en voor de open vragen maximaal 20 punten.
- Het totaal aantal punten mp voor de meerkeuzevragen wordt als volgt bepaald:
 - o per meerkeuzevraag i wordt het aantal foutief beantwoorde alternatieven f_i bepaald (0-4);
 - o de som f van dit aantal voor alle 10 meerkeuzevragen wordt bepaald ($0 \leq f \leq 40$)
 - o het aantal punten mp is dan gelijk aan $mp = 50 \times \max\{0, (40 - 1.5 \times f) / 40\}$
- Het eindcijfer c wordt bepaald door de som te nemen van mp , het totaal aantal punten behaald voor de 5 korte vragen en de twee open vragen, en vervolgens het resultaat te delen door 10.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen, boek of andere bronnen is niet toegestaan.
- Het gebruik van grafische en niet-grafische rekenmachines is eveneens niet toegestaan.
- Beantwoord de meerkeuze vragen op het bijgeleverde antwoordformulier.
- Beantwoord de open vragen zo bondig mogelijk; *geef geen irrelevante informatie, dit kan leiden tot puntenaftrek!*
- Controleer of u op ieder blaadje uw naam en studienummer heeft vermeld en geef het totaal aantal ingeleverde bladen op (tenminste) de eerste pagina.

Notationele conventies:

- $A \leq B$ betekent dat er een polynomiale-tijd reductie van A naar B bestaat.
- A^c is het complement van het probleem A .
- Er wordt steeds vanuit gegaan, dat $P \neq NP$ en $NP \neq co-NP$, tenzij uitdrukkelijk het tegendeel wordt vermeld.

MEERKEUZEVRAGEN

Vraag 1. Welke van de volgende uitspraken is waar:

- a. $SAT \leq 3SAT$
- b. $VERTEX\ COVER \leq PARTITION$
- c. $A \leq SUBSETSUM$ voor een willekeurig **P**-probleem A .
- d. $A \leq B$ en $B \leq A$ als A en B beide **NP**-harde problemen zijn.

Vraag 2. Gegeven zijn 4 beslissingsproblemen A , B , C en D . Het probleem A is een **P**-probleem, B en C zijn **NP**-problemen en D is een **NP**-hard probleem. Er geldt dan:

- a. Als $C \leq A$, dan geldt ook $B \leq A$.
- b. Als $D \leq C$, dan geldt $P = NP$.
- c. $A \leq D$.
- d. $B \leq C$ of $C \leq B$.

Vraag 3. Voor twee problemen X en Y geldt dat er een **NPC**-probleem A bestaat zodanig dat $X \leq A$ en $A \leq Y$. Welke van de volgende uitspraken is (zijn) waar?

- a. X is een **NP**-probleem.
- b. Y is een **NP**-hard probleem.
- c. Als Y een **P**-probleem is, dan is $P = NP$.
- d. Y is een **NPC**-probleem.

Vraag 4. Ga na welke van de volgende uitspraken juist zijn:

- a. Als A een **NPC**-probleem is dan is A^c een **co-NPC**-probleem.
- b. $PSPACE^{NP} \subseteq NP^{PSPACE}$.
- c. Als $A^c \in PSPACE$ dan $A \in PSPACE$.
- d. $NP \cup co-NP \subseteq PSPACE$.

Vraag 5. Neem het volgende COVER-OF-CLIQUE-probleem:

Gegeven: een ongerichte niet lege graaf $G = (V, E)$ en een positieve integer K .

Vraag: heeft G een vertex cover ter grootte van K of minder of een clique ter grootte van K of meer?

Om aan te tonen dat dit probleem een **NP-hard**-probleem is wordt de volgende reductie voorgesteld:

Neem een instantie $I = (G = (V, E), K)$ van het **VERTEX COVER** probleem.

Laat $n = |V|$, en construeer de volgende instantie $f(I) = (G' = (V', E'), K')$ van bovenstaand **COVER-OF-CLIQUE**-probleem met $V' = V \cup \{x_i \mid i=1,2, \dots, n\} \cup \{y_i \mid i=1,2, \dots, n\}$ en $E' = E \cup \{x_i, y_i \mid i=1,2, \dots, n\}$ en $K' = K + n$.

Hierbij zijn x_i en y_i knopen die niet in V voorkomen.

Men beweert dat $f(I)$ een yes-instantie is van **COVER-OF-CLIQUE** dan en slechts dan als I een yes-instantie is van **VERTEX COVER**.

- a. Dit is juist, want voor elke I kan $f(I)$ nooit een clique van de vereiste grootte hebben, $f(I)$ heeft echter wel een vertex cover ter grootte van K' dan en slechts dan als I een vertex cover heeft ter grootte van K .
- b. Dit is onjuist; het oorspronkelijke probleem is een probleem in $NP \cap co-NP$ en het bestaan van zo'n reductie zou impliceren dat $P = NP$.
- c. Dit is onjuist. Een reductie van **VERTEX COVER** naar dit **COVER-OF-CLIQUE** probleem zou impliceren dat $P = NP$, immers het bovenstaande probleem is een **P**-probleem, omdat iedere ongerichte graaf een clique of een vertex-cover ter grootte van K heeft.
- d. Dit is juist. Er geldt immers dat $f(I)$ zowel een vertex cover als een clique ter grootte van K' heeft dan en slechts dan als I een vertex cover heeft ter grootte van K .

- Vraag 6. Gegeven is een ongerichte graaf $G = (V, E)$ en een positieve integer K . Het probleem te bepalen of G niet meer dan 2 verschillende vertex covers ter grootte van K of minder bevat, is een
- NP-volledig probleem.
 - co-NP-volledig probleem.
 - P-probleem.
 - probleem in $\text{NP} \cap \text{co-NP}$.
- Vraag 7. We noemen een optimaliseringsprobleem A *benaderbaar* als A een approximatie-algoritme heeft met approximatieratio $1 \leq 1 + \varepsilon < \infty$. Dan geldt:
- Er bestaat minstens één optimaliserings-probleem dat niet benaderbaar is.
 - Het VERTEX COVER-probleem is benaderbaar.
 - Als TSP-OPTIMALISERING benaderbaar zou zijn, dan zou $\text{P} = \text{NP}$.
 - Sommige optimaliseringsproblemen hebben een approximatieratio gelijk aan 1.
- Vraag 8. Het AMBULANCELOCATIE probleem bestaat uit een graaf $G=(V, E)$, een afstand $d \in \mathbb{Z}^+$ en een budget $B \in \mathbb{Z}^+$. De vraag is of er een subset V' (de ambulancelocaties) van V bestaat met $|V'| \leq B$, zodat iedere knoop v uit V op een afstand van hoogstens d van een ambulancelocatie ligt, dwz. is er voor iedere knoop v uit V een element $v' \in V'$ te vinden zodanig dat er een pad van v naar v' in G bestaat ter lengte van hoogstens d . Voor dit probleem geldt het volgende:
- instanties van dit probleem met $d \leq 1$ zijn in polynomiale tijd oplosbaar;
 - instanties van dit probleem met $d = |V|$ zijn in polynomiale tijd oplosbaar;
 - instanties van dit probleem met $d = 1$ zijn vertex cover instanties;
 - voor iedere constante c zijn instanties van dit probleem met $B \leq c$ in polynomiale tijd oplosbaar.
- Vraag 9. Neem het volgende probleem: Gegeven een SAT-instantie (U, C) en een integer K , is het maximale aantal clauses in C dat door een waarheidstoekenning vervuld kan worden gelijk aan K ? Er geldt dan:
- Voor $K = 1$ is dit probleem een P-probleem.
 - Voor $K = |C|$ is dit probleem een NPC-probleem.
 - Dit is een probleem in P^{NP} .
 - Dit probleem kan worden opgelost door een polynomiaal algoritme dat hoogstens tweemaal een NP-orakel raadpleegt.

Vraag 10. Neem het volgende HALFHAMPAD-probleem:

Instantie Een ongerichte graaf $G = (V, E)$

Vraag Heeft G een simpel pad dat tenminste de helft van alle knopen in V bevat?

De **NP**-hardheid van dit probleem kan worden aangetoond door middel van de volgende transformatie f die voor iedere instantie $I = (G = (V, E))$ van HAMPAD de volgende instantie $f(I) = (G' = (V', E'))$ van HALFHAMPAD construeert:

- a. $V' = V \cup \{v' \mid v \in V\}; E' = E.$
- b. $V' = V; E' = E \cup \{\{v, v'\} \mid v \in V'\}.$
- c. $V' = V \cup \{v' \mid v \in V\}; E' = E \cup \{\{v, v'\} \mid v \in V, v' \in V'\}.$
- d. $V' = V \cup \{v' \mid v \in V\} \cup \{z, z', z'', z'''\}; E' = E \cup \{\{z, v\} \mid v \in V\} \cup \{\{z, z'\}\}.$

OPEN VRAGEN I

Onderstaande vragen dient u kort te beantwoorden.

Een antwoord dient in hoogstens 5-7 regels gegeven te worden.

Vraag 11. Neem het volgende randomized algoritme voor het probleem om, gegeven een lijst A met n getallen $a_1, a_2, \dots, a_n$ te bepalen of er een waarde meer dan $n/2$ maal voorkomt in de lijst.

```
majority(A, n)
begin
  index := random(1, n); % kies een random getal uit 1..n
  x := aindex;
  count := 0;
  for k=1 to n do
    if ak = x then count := count+1
    k:=k+1;
  return (count > n/2);
end
```

Is op grond van dit algoritme te concluderen dat dit probleem een **BPP** probleem is? Motiveer je antwoord.

Vraag 12. Waarom is tot op dit moment niet bekend of $\text{TQBF} \in \text{NP}$?
(Hint: wat zou de consequentie van een bevestigend antwoord zijn en wat van een ontkennend?)

Vraag 13. Waarom is het volgende probleem een **NP**-compleet probleem:
 $\text{DICHTESUBGRAAF} = \{ (H, K, L) : G \text{ is een subgraaf van een ongerichte graaf } H \text{ met minstens } K \text{ knopen en } L \text{ kanten} \}.$

Vraag 14. Als gegeven is dat $A \in \text{NP} \cap \text{co-NP}$, geldt dan ook dat $A^c \in \text{NP} \cap \text{co-NP}$?
Motiveer je antwoord.

Vraag 15. Welke gevolgen heeft het factorizeringsalgoritme van Schorr voor de complexiteitstheorie?

OPEN VRAGEN II

Beantwoord onderstaande vragen zo kort mogelijk. Geef geen irrelevante informatie, dit kan tot puntenaftrek aanleiding geven.

Vraag 16. (10 punten)

Neem het volgende 3-SCHEDULINGS-probleem:

Er zijn N jobs. Iedere job j met $j = 1, \dots, N$, kost t_j tijdseenheden op een *standaard* machine M waarvan de processorsnelheid op $p = 1$ wordt gezet. Er zijn 3 sequentiële machines M_1, M_2, M_3 beschikbaar met processor snelheden p_1, p_2 en p_3 , respectievelijk. Een job j uitgevoerd op machine $k=1,2,3$ kost derhalve t_j/p_k tijdseenheden. Er is van te voren een deadline D bekend. Gevraagd wordt of er een toewijzing σ van jobs aan machines bestaat zodanig dat elke machine na D tijdseenheden alle jobs uitgevoerd heeft.

- Toon aan, dat het 3-SCHEDULINGS probleem een **NP**-probleem is (≤ 5 regels).
- Laat zien dat dit probleem een **NP-hard** probleem is (≤ 10 regels).

Vraag 17. (10 punten)

Het algemene SATISFIABILITY probleem kan eenvoudig worden gedefinieerd als de taal

$$\text{SAT} = \{ \varphi \mid \varphi \text{ is een vervulbare propositionele formule} \}$$

Je mag ervan uitgaan dat geldt $\text{SAT} \in \text{NPC}$.

Geef nu precies aan (≤ 10 regels) waarom de volgende redenering onjuist is:

- Neem het probleem $\text{UNSAT} = \{ \varphi \mid \varphi \text{ is een onvervulbare propositionele formule} \}$. Dit probleem is een probleem in **co-NP**.
- We construeren de volgende NDTM M voor UNSAT:
Voor input ϕ :
gok een waarheidstoekenning τ ;
als τ de formule ϕ vervult, dan output REJECT, anders output ACCEPT.
- Deze machine accepteert UNSAT; omdat M een machine is die in polynomiale tijd opereert (verificatie van satisfiability van ϕ kost polynomiale tijd), geldt derhalve dat $\text{UNSAT} \in \text{NP}$.
- Omdat uit $\text{NPC} \cap \text{co-NP} \neq \emptyset$ volgt dat $\text{NP} = \text{co-NP}$, kunnen we concluderen dat **NP = co-NP**.

EINDE TENTAMEN

