IN1305I Fundamentele Informatica, Deel 1

Deeltentamen (31 oktober 2005, Uitwerkingen)

Opgave T.1.1 Zij p, q en r propositieletters van een propositioneel logische taal.

(i) Ga met de waarheidstafelmethode na of de formule $(p \to (q \vee r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ al dan niet een tautologie is. Geef ook een tegenmodel mocht dit niet het geval zijn.

(ii) Ga met de waarheidstafelmethode na of de volgende redenering geldig is:

$$\neg(\neg p \to q), \neg p \to (q \wedge \neg r) \therefore (r \to q) \to p.$$

Mocht deze redenering niet geldig zijn, geef dan ook een tegenmodel.

Uitwerking:

(i) Beschouw de volgende waarheidstabel:

p	q	r	$(p$	$\to$	$(q$	$\vee$	$r))$	$\to$	$((p$	$\to$	$q)$	$\to$	$(p$	$\to$	$r))$
0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
								$\uparrow$							

De formule $(p \to (q \vee r)) \to ((p \to q) \vee (p \to r))$ is een *contingentie*. In de op één na laatste rij is $(p \to (q \vee r)) \to ((p \to q) \vee (p \to r))$ onwaar, hetgeen zoveel wil zeggen als dat voor iedere valuatie v met $v(p) = v(q) = 1$ en $v(r) = 0$, het ook zo is dat $v((p \to (q \vee r)) \to ((p \to q) \vee (p \to r))) = 0$. In iedere andere valuatie is $(p \to (q \vee r)) \to ((p \to q) \vee (p \to r))$ waar.

(ii) Beschouw de volgende waarheidstafel:

p	q	r	$\neg\,($	$\neg$	p	$\to$	$q\,)$	$\neg$	p	$\to$	$(\,q$	$\wedge$	$\neg$	$r\,)$		$(\,r$	$\to$	$q)$	$\to$	p
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0		0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1		1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0		0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1		1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0		0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1		1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0		0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1		1	1	1	1	1

Uit deze waarheidstafel kan worden afgelezen dat er geen valuaties zijn waarin beide premissen tezamen waar zijn. Het volgt dat de redenering *geldig* is. In alle valuaties waarin beide premissen de waarheidswaarde 1 krijgen — deze zijn er evenwel niet — is de conclusie ook waar. Stel maar eens dat de redenering *niet* geldig zou zijn. Volgens de definitie van logisch gevolg zou er dan een valuatie moeten zijn waarin alle premissen waar zijn maar de conclusie niet. Het is duidelijk dat een dergelijke valuatie niet bestaat.

Opgave T.1.2

(i) Bewijs dat voor alle $A, B \in PROP$: als $A \vDash B$ en $\vDash A$, dan $\vDash B$.

(ii) Laat zien dat *niet* voor alle $A, B \in PROP$: indien $\vDash A \vee B$, dan ook $\vDash A$ of $\vDash B$. Toon dit aan door een tegenvoorbeeld te construeren.

Uitwerking:

(i) *Bewijs:* Beschouw willekeurige formules $A, B \in PROP$ en stel (1) $A \vDash B$, oftewel voor alle valuaties v met $v(A) = 1$ ook $v(B) = 1$. Stel eveneens dat (2) $\vDash A$. We moeten bewijzen dat $\vDash B$, oftewel dat voor alle valuaties v, $v(B) = 1$. Beschouw een willekeurige valuatie w. Met aanname (2), dan $w(A) = 1$. Met aanname (1) volgt dan dat eveneens $w(B) = 1$. Met w willekeurig gekozen, mogen we concluderen dat voor alle valuaties v, $v(B) = 1$, hetgeen te bewijzen was. $\square$

(ii) Bij deze opgave moeten we formules A en B vinden waarvoor geldt dat $\vDash A \vee B$ maar noch $\vDash A$ noch $\vDash B$. Laat $A = p$ en $B = \neg p$. Het is eenvoudig na te gaan — bijvoorbeeld middels de waarheidstafelmethode — dat $p \vee \neg p$ een tautologie is, d.w.z., $\vDash p \vee \neg p$. Echter, noch p noch $\neg p$ is een tautologie.

Opgave T.1.3 Bewijs de volgende stellingen in het (niet-uitgebreide) systeem van natuurlijke deductie volgens Fitch (dus *niet* met waarheidstabellen!):

(i) $\vdash (\neg p \to \neg q) \to (q \to \neg\neg p)$

(ii) $\vdash (p \vee q) \to ((r \to p) \vee (r \to q))$

Uitwerking:

(i)

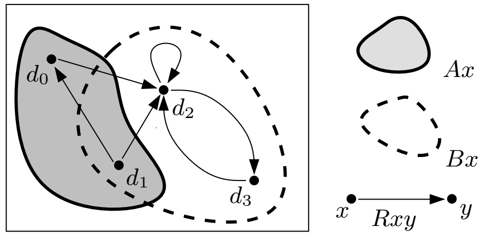
1.	$\mid\ \neg p \to \neg q$	(hypothese)
2.	$\mid\ \mid\ q$	(hypothese)
3.	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg p$	(hypothese)
4.	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg p \to \neg q$	(rei, 1)
5.	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg q$	($\to$-elim, 3,4)
6.	$\mid\ \mid\ \mid\ q$	(rei, 2)
7.	$\mid\ \mid\ \neg\neg p$	($\neg$-intro, 3,5,6)
8.	$\mid\ q \to \neg\neg p$	($\to$-intro, 2,7)
9.	$(\neg p \to \neg q) \to (q \to \neg\neg p)$	($\to$-intro, 1,8)

(ii)

1.	$\mid\ p \vee q$	(hypothese)
2.	$\mid\ \mid\ p$	(hypothese)
3.	$\mid\ \mid\ \mid\ r$	(hypothese)
4.	$\mid\ \mid\ \mid\ p$	(rei, 2)
5.	$\mid\ \mid\ r \to p$	($\to$-intro, 3,4)
6.	$\mid\ \mid\ (r \to p) \vee (r \to q)$	($\vee$-intro, 5)
7.	$\mid\ \mid\ q$	(hypothese)
8.	$\mid\ \mid\ \mid\ r$	(hypothese)
9.	$\mid\ \mid\ \mid\ q$	(rei, 7)
10.	$\mid\ \mid\ r \to q$	($\to$-intro, 8,9)
11.	$\mid\ \mid\ (r \to p) \vee (r \to q)$	($\vee$-intro, 10)
12.	$\mid\ (r \to p) \vee (r \to q)$	($\vee$-elim, 1,2,6,7,11)
13.	$(p \vee q) \to ((r \to p) \vee (r \to q))$	($\to$-intro, 1,12)

Opgave T.1.4

(i) Beschouw het onderstaande (informele) model met vier objecten.



Ga na welke van de volgende uitspraken waar zijn in dit model. Motiveer steeds kort het antwoord.

(a) $\forall x\,(Ax \to \exists y\,(By \wedge Ryx))$

(b) $\exists x\,(\neg Ax \wedge \neg Bx) \to (\exists x \neg Ax \wedge \exists x \neg Bx)$

(c) $(\exists x \neg Ax \wedge \exists x \neg Bx) \to \exists x\,(\neg Ax \wedge \neg Bx)$

(d) $\exists x\,((Ay \wedge By) \to Ryx)$

(ii) Geef een (informeel) model met tenminste drie objecten (zoals hierboven) waarin de volgende formules alle drie tegelijk waar zijn:

(a) $\exists x \exists y \neg Rxy$

(b) $\exists x \forall y Rxy$

(c) $\forall x \forall y \forall z\,((Rxy \wedge Rxz) \to (Ryz \vee Rzy))$

Uitwerking:

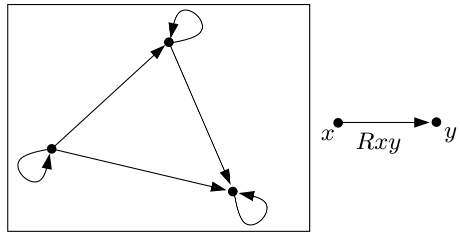
(i) (a) *onwaar.* Het object d_1 heeft de eigenschap (waarnaar verwezen wordt met) A en wordt bereikt door geen enkel object. In het bijzonder wordt d_1 niet bereikt door een een object met de eigenschap (waarnaar verwezen wordt met) B.

(b) *waar.* Er is geen object dat noch de eigenschap (waarnaar verwezen wordt met) A noch de eigenschap (waarnaar verwezen wordt met) B. Dus is $\exists x\,(\neg Ax \wedge \neg Bx)$ onwaar in het model. Het antecedent in deze formule is onwaar, en dus de hele implicatie waar. Bovendien is de formule een instantie van een stelling van de predicatenlogica: $\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x \varphi \wedge \exists x \psi)$, waar φ en ψ willekeurige predicaatlogische formules zijn.

(c) *onwaar.* De formule $\exists x \neg Ax$ is waar, bijvoorbeeld vanwege d_2 en ook $\exists x \neg Bx$ is waar vanwege d_0. Er is echter geen object dat noch de eigenschap (waarnaar verwezen wordt door) A noch de eigenschap (waarnaar verwezen wordt door) B heeft. Dus het antecedens $\exists x \neg Ax \wedge \exists x \neg Bx$ is waar terwijl het consequens $\exists x\,(\neg Ax \wedge \neg Bx)$ onwaar is in het bovenstaande model. Het volgt dat de implicatie $(\exists x \neg Ax \wedge \exists x \neg Bx) \to \exists x\,(\neg Ax \wedge \neg Bx)$ in zijn geheel onwaar is.

(d) *waar.* Deze formule zegt dat er een object bestaat waarnaar een pijl vertrekt vanuit alle objecten met zowel de eigenschap (waarnaar verwezen wordt met) A als de eigenschap (waarnaar verwezen wordt met) B. Dit is inderdaad waar. Beschouw namelijk het object d_0. Het enige object in het model dat zowel de eigenschap (waarnaar verwezen wordt met) A als de eigenschap (waarnaar verwezen wordt met) B heeft is d_1 en er gaat inderdaad een pijl van d_1 naar d_0.

(ii) We zeggen dat een object d' bereikbaar is vanuit een object d als d in de relatie R staat met d (in termen van 'pijlen': als er een pijl gaat van d naar d'). De eerste formule vereist dat objecten te vinden zijn zodanig dat één niet bereikbaar is vanuit de ander. De tweede formule zegt dat er een object te vinden is van waaruit alle objecten bereikbaar zijn. Merk op dat dit in het bijzonder moet gelden voor het betreffende object zelf, dat dus vanuit zichzelf bereikbaar moet zijn. De derde formule zegt dat alle objecten die bereikbaar zijn vanuit een gemeenschappelijk object, de één bereikbaar moet zijn vanuit de ander *of* de ander vanuit de één. Merk hierbij op dat hieruit volgt dat indien een object d' vanuit een ander object d bereikbaar is, dat dan ook d' vanuit zichzelf bereikbaar moet zijn. Een model waarin deze drie formules tegelijk vervuld zijn is het volgende:



Opgave T.1.5 Zij A, B, C en D verzamelingen in een universele verzameling U. Bewijs dat (een Venn-diagram alleen volstaat *niet*):

(i) $A^c - B^c = B - A$

(ii) Als $A \subseteq B$ en $C \subseteq D$, dan $A \cup C \subseteq B \cup D$

Uitwerking:

(i) *Bewijs:* Beschouw willekeurige verzamelingen A en B alsmede een willekeurig element $x \in U$. Beschouw de volgende equivalenties:

$$\begin{array}{rll} x \in A^c - B^c & \text{desda} & x \in A^c \text{ en } x \notin B^c \\ & \text{desda} & x \notin A \text{ en niet } x \in B^c \\ & \text{desda} & x \notin A \text{ en niet } x \notin B \\ & \text{desda} & x \notin A \text{ en niet niet } x \in B \\ & \text{desda} & x \notin A \text{ en } x \in B \\ & \text{desda} & x \in B - A. \end{array}$$

We mogen concluderen dat $A^c - B^c = B - A$, hetgeen te bewijzen was. □

(ii) *Bewijs:* Beschouw willekeurige verzamelingen A, B, C en D. Stel $A \subseteq B$ en $C \subseteq D$. Beschouw een willekeurig element $x \in U$. Stel dat $x \in A \cup C$. Dan $x \in A$ of $x \in C$. (Dit is een *gevalsonderscheid* en we moeten laten zien dat de gewenste conclusie, namelijk $x \in B \cup D$, in beide gevallen volgt.x) In het eerste geval, met de aanname dat $A \subseteq B$, ook $x \in B$. Maar dan zeker $x \in B \cup D$. In het tweede geval, met de aanname dat $C \subseteq D$, tevens $x \in D$. Dus ook in dit geval $x \in B \cup D$. We mogen dus concluderen dat $x \in B \cup D$, hetgeen te bewijzen was. □