Tentamen Lineaire Algebra WI1105IN
30 augustus 2007, 9.00 – 12.00 uur

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands. Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en niet verboden. U dient bij berekeningen wel de tussenstappen op papier te vermelden.

---

1. **a.** Bereken de algemene oplossing in vectorvorm van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ met

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

b. Voor de genoemde matrix A, is elk stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ consistent? Indien niet: geef een voorbeeld van een vector $\mathbf{y}$ waarvoor het stelsel strijdig is.

2. Voor welke a is de determinant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$ gelijk aan 0.?

3. **a.** Vind (met behulp van de methode van Gram-Schmidt) een orthogonale basis voor $\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

b. Gebruik het vorige onderdeel om een QR-ontbinding te maken voor de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

4. **a.** Bereken de complexe eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$.

b. Bereken de kleinste-kwadratenoplossing van het stelsel

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 3x_1 & + & x_2 & = & 7 \\ 2x_1 & - & x_2 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \\ 2x_1 & & & = & 1. \end{array} \right.$$

5. We bekijken een Markov proces met (kans)matrix

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 2/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

a. Bereken de steady state (kans)vector $\mathbf{q}$.

b. Ga na dat $\frac{1}{4}$ en $\frac{3}{4}$ eigenwaarden zijn van A.

c. Bereken exact (dus zonder afrondingen) $\mathbf{x}_{30}$ als het proces start vanuit de toestand $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3/6 \\ 2/6 \\ 1/6 \end{bmatrix}$.

6. Geef bij elk van de volgende beweringen in geval van juistheid een bewijs en in geval van onjuistheid een tegenvoorbeeld of een correct tegenargument.

a. Als A en B $n \times n$ matrices zijn met $AB = 0$ dan is ook $A^3B^3 = 0$.

b. Voor $n \times n$ matrices A en B geldt $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

c. Als $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ en $\mathbf{v}_4$ onafhankelijke vectoren zijn in $\mathbb{R}^5$, dan zijn $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$, en $\mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_1$ eveneens onafhankelijk.

d. Als A een 4×4 matrix is met eigenwaarden $\lambda_1 = -3.25$, $\lambda_2 = -0.78$, $\lambda_3 = 1.13$ en $\lambda_4 = 4.97$, dan convergeert de inverse powermethode naar de eigenwaarde λ_3

ANTWOORDEN + UITWERKINGEN

1a

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & -4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -4 & -8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_2, x_4 en x_5 kunnen als vrije variabelen genomen worden. De algemene oplossing wordt daarmee

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2x_2 - 2x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ 4 + 2x_4 - 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1b $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ is precies dan oplosbaar als $\mathbf{y} \in \operatorname{Col} A$. Uit de echelonmatrix blijkt dat de eerste en de derde kolom van A een basis vormen voor $\operatorname{Col} A$. $\operatorname{Col} A \neq \mathbb{R}^3$, dus zo'n $\mathbf{y}$ bestaat zeker.
Verder is te zien dat de kolomruimte alleen vectoren $\mathbf{v}$ bevat waarvoor $v_2 = -v_3$.
De vector $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ voldoet daar niet aan, dus zit niet in $\operatorname{Col} A$.

2

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-2 & 3-2a \\ 0 & 1 & -4-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-2 & 3-2a \\ 1 & -4-a \end{vmatrix} = (a-2)(-4-a)-(3-2a) = -a^2+5$$

Dan is het duidelijk: de determinant is 0 precies als $a = \pm\sqrt{5}$.

3a Noem de vectoren maar even $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Dan

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1,$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 = [0\ 3\ \ -3\ 3]^T = 3\,[0\ 1\ \ -1\ 1]^T$$

Ik reken door met $\mathbf{b}_2 = [0\ 1\ \ -1\ 1]^T$.

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \tfrac{12}{3}\mathbf{b}_1 - \tfrac{-6}{3}\mathbf{b}_2 = [-3\ 1\ 2\ 1]^T$$

3b Normeren van de in het vorige onderdeel gevonden basis geeft de matrix

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & -3/\sqrt{15} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{15} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{15} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{15} \end{bmatrix}$$

en dan volgt uit $A = QR$ dat $R = Q^T A =$

$$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -3/\sqrt{15} & 1/\sqrt{15} & 2/\sqrt{15} & 1/\sqrt{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 4\sqrt{3} \\ 0 & 3\sqrt{3} & -2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{15} \end{bmatrix}$$

4a $|B - \lambda I| = (3-\lambda)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow 3 - \lambda = \pm 3i$.
De eigenwaarden zijn: $\lambda_{1,2} = 3 \pm 3i$.
Eigenvector bij $\lambda_1 = 3 - 3i$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3-\lambda_1 & 3 & 0 \\ -3 & 3-\lambda_1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 3i & \boxed{3} & 0 \\ -3 & 3i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Een eigenvector bij λ_1: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ (of $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$) en door conjugeren:
$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ is e.v. bij $\lambda_2 = 3 + 3i$ (of evt. $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$).

4b Kleinste-kwadratenoplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$: los op: $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 18 & 3 & 33 \\ 3 & 6 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 1 & 11 \\ -11 & 0 & -18 \end{array}\right]$$

Dus we vinden $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 18/11 \\ 13/11 \end{bmatrix}$.

5a Dit is een (genormeerde) eigenvector bij eigenwaarde $\lambda = 1$:

$$[A - 1I \mid \mathbf{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & -2/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Eigenvectoren: alle veelvouden van $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, dus $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$.

5b We berekenen direct de eigenvectoren (die toch nodig zijn bij onderdeel **c.**).

$$[\,A - 3/4I \mid \mathbf{0}\,] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dus een eigenvector bij $\lambda = \frac{3}{4}$: $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, en net zo is $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ een eigenvector bij $\lambda = \frac{1}{4}$

5c Strategie: schrijf $\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$; dan $\mathbf{x}_k = c_1 1^k\mathbf{v}_1 + c_2(\frac{3}{4})^k\mathbf{v}_2 + c_3(\frac{1}{4})^k\mathbf{v}_3$. Om $\mathbf{c}$ te vinden moet je oplossen het stelsel met aangevulde matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3/6 \\ 1 & 0 & -2 & 2/6 \\ 1 & -1 & 1 & 1/6 \end{array}\right]$$

Dit geeft ('t is haast uit het hoofd te doen) $c_1 = \frac{2}{6}$, $c_2 = \frac{1}{6}$, $c_3 = 0$, waaruit volgt $\mathbf{x}_{30} = \frac{1}{3}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{6}(\frac{3}{4})^k\mathbf{v}_2$.

6a waar: $A^3B^3 = A^2(AB)B^2 = A^2\,(0)\,B^2 = 0$.

6b onwaar: Er geldt weliswaar $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$, maar doordat de matrixvermenigvuldiging niet commutatief is vallen de middelste termen niet altijd tegen elkaar weg.
Een concreet tegenvoorbeeld: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

6c onwaar: $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4) = (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + (\mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_1)$.

6d onwaar: de inverse powermethode convergeert naar de eigenwaarde die het dichtst bij nul ligt, en dat is in dit geval λ_2.

NORMEN

1a **3** pt: **1** voor eche.vorm; **2** voor opl. (**1** eraf als niet in v.vorm)

1b **3** pt: **2** voor argument, **1** voor **y**

2 **3** pt: naar bevind van zaken. (indien $a = -\sqrt{5}$ vergeten: $\frac{1}{2}$ eraf)

3a **4** pt: **2** voor tweede en **2** voor derde vector.

3b **2** pt: **1** punt voor Q en **1** punt voor R.

4a **4** pt: **2** pt voor eigenwaarden en **2** pt voor eigenvectoren

4b **3** pt: **2** pt voor juiste aangevulde matrix.

5a **2** pt: waarvan **1** pt voor 'normeren'.

5b **2** pt.

5c **2** pt.

6 **8** pt: **2** punten per onderdeel. Geen argument $\Rightarrow$ geen punten.

cijfer $:= \frac{1}{4} \cdot (\textbf{totaal} + 4)$**, afgerond op geheel getal.**