Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, 2628 CD DELFT

TU Delft

tentamen Analyse (deel 2) – wi 1 005 In, dl. 2

21 januari 2008, 09.00–11.00 uur

Deelname aan dit tentamen is voorbehouden aan wie zich hebben opgegeven.
Zo nodig wordt je werk onbeoordeeld terzijde gelegd.

Het ***formuleblad*** *van het instellingspakket en een* ***rekenmachine*** *mogen worden gebruikt.*
Onderling contact, communicatieapparatuur, boeken en aantekeningen zijn ***niet*** *toegestaan.*

Elk antwoord dient van een deugdelijke argumentatie te worden voorzien.
Tenzij anders gevraagd worden exacte antwoorden verlangd (dus geen benaderingen).

1. Bereken met de regel van De l'Hospital of met behulp van machtreeksen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x \arctan x}\,. \qquad 6$$

2. Gegeven is de *rij* $\big(a_n\big)_{n=1}^{\infty}$ met $a_n = \dfrac{\sin n}{n^2}$.

   a) i) Is de rij monotoon (dus stijgend of dalend)?
   ii) Is de rij alternerend? 6
   iii) Is de rij begrensd?

   b) Heeft de rij een limiet? Zo ja, welke? 6

3. Gegeven is de *reeks* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ met $a_n = \dfrac{\sin n}{n^2}$.

   Is de reeks absoluut convergent, relatief (*conditionally*) convergent, of divergent? 6

4. Gegeven is de reeks $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{n+1}\,(x-2)^n$.

   a) Bepaal de convergentiestraal en het convergentie-interval van de reeks. 8

   b) Laat s op het convergentie-interval de somfunctie van de reeks zijn, dus:

   $$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{2n-1}{n+1}\,(x-2)^n\,. \qquad 4$$

   Geef een machtreeksontwikkeling rond 2 van de afgeleide s' van deze functie.

   c) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks uit het vorige onderdeel. 2

5. Gegeven is de functie $f : D \to \mathbb{R}$ met $f(x,y) = x\sqrt{y}$.

   a) Bepaal en teken het (maximale) domein D van f . 2

   b) Bepaal f_x , f_y en f_{xy} in het punt $P = (1,4)$. 6

6. Bereken $\displaystyle\int_0^1\!\!\int_1^2 \frac{x\,e^x}{y}\,dy\,dx\,.$ 8

Normering

Elk onderdeel levert maximaal het aantal in de kantlijn vermelde punten op.
Als t het aantal toegekende punten is, en q het resultaat van de quizzen voor deel 2
$(6 \le t \le 60$ *en* $0 \le q \le 10)$, *is het cijfer* $c = \max\{\frac{t}{6}, \frac{t+4q}{10}\}$ $(c \in \mathbb{N},\ 1 \le c \le 10)$. 6

1. **De l'Hospital** $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sin x - \cos x}{x \arctan x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos x + \sin x}{1 \cdot \arctan x + x \cdot \frac{1}{1+x^2}} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin x + \cos x}{\frac{1}{1+x^2} + 1 \cdot \frac{1}{1+x^2} + x \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2}} = \frac{1+0+1}{1+1-0} = 1\,.$$ 6

machtreeksen $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sin x - \cos x}{x \arctan x} =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)\right) - \left(x + O(x^3)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)}{x \cdot (x + O(x^3))} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + O(x^3)}{x^2 + O(x^4)} = 1\,.$$

2. a) i) De noemer blijft positief, maar de teller, en daardoor a_n, blijft van teken veranderen: bijvoorbeeld is $a_1 = \sin 1 > 0$, $a_2 = \frac{1}{4}\sin 2 < 0$ en $a_4 = \frac{1}{16}\sin 4 > 0$.
De conclusie luidt dan ook dat de rij noch stijgend noch dalend is.

ii) De rij is niet alternerend, want $a_2 = \frac{1}{4}\sin 2$ en $a_3 = \frac{1}{9}\sin 3$ zijn beide negatief. 6

iii) Daar voor alle n geldt dat $-1 \le \sin n \le 1$ [1], en bijgevolg is $-\frac{1}{n^2} \le a_n \le \frac{1}{n^2}$.
Vanwege $n \ge 1$ geldt verder dat $-1 \le -\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2} \le 1$; vandaar dat $-1 \le a_n \le 1$.
De rij is dus (naar beneden èn naar boven) begrensd.

[of:] Uit het bestaan van de limiet (*zie* volgende onderdeel) volgt onmiddellijk dat de rij begrensd is.

b) Omdat $-\frac{1}{n^2} \le a_n \le \frac{1}{n^2}$ en $\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n^2} = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$ volgt uit de insluitstelling dat ook $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. De rij $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ is dus *convergent.* 6

[of:] Toepassing van de regel van De l'Hospital levert geen verbeterd inzicht.

3. De reeks is *absoluut convergent*, want:

- $|a_n| = \dfrac{|\sin n|}{n^2} \le \dfrac{1}{n^2}$ en 6
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is convergent ($p = 2$),

en dankzij het majorante-minorantekenmerk houdt dat in dat $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergent is.

[of:] Daar $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sin n}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}$ begrensd is volgt convergentie van $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uit die van $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.[2]

4. In het vervolg schrijven we $a_n = \frac{2n-1}{n+1}(x-2)^n$.

a) We passen het kenmerk van d'Alembert toe (dat van Cauchy is lastiger):

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{2n+1}{n+2}(x-2)^{n+1}}{\frac{2n-1}{n+1}(x-2)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(n+1)}{(n+2)(2n-1)} \cdot |x-2| = 1 \cdot |x-2| = 1$$

precies als $x = 1$ of $x = 3$. De convergentiestraal is dus 1, en de randpunten zijn 1 en 3. 8

Randonderzoek: als $x = 1$ of $x = 3$ geldt dat $|a_n| = \frac{2n-1}{n+1} \to 2 \ne 0$. In beide gevallen ontstaat dus een reeks waarvan de algemene term niet naar 0 gaat, en die dus *divergent* is.

We stellen vast dat de convergentiestraal $R = 1$ en het convergentie-interval $I = (1,3)$.

b) De machtreeksontwikkeling van s' (rond het middelpunt 2) ontstaat uit die van s door termsgewijze te differentiëren (voor $x \in (1,3)$)[3]: 4

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{n+1}(x-2)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n+1}\, n\,(x-2)^{n-1}\,.$$

$\boxed{\longrightarrow}$

[1] eenvoudig is in te zien dat de gelijktekens niet nodig zijn
[2] deze versie van het limietkenmerk staat niet in het boek
[3] we gaan niet in op de vraag of de restterm naar 0 gaat voor $n \to \infty$

c) De convergentiestraal van de gevonden machtreeksontwikkeling verschilt niet van die van de oorspronkelijke machtreeksontwikkeling en bedraagt dus eveneens 1. 2

[of:] Opnieuw een kenmerk toepassen om de convergentiestraal te bepalen is onnodig omslachtig.

5. a) De enige beperking die aan x en y gesteld moet worden is dat $y \geq 0$ moet zijn omdat anders de wortel niet gedefinieerd is. Het (maximale) domein is dus $D = \{(x, y) \mid y \geq 0\}$ (het gesloten bovenhalfvlak in $\mathbb{R}^2$; een ruwe schets volstaat). 2

b)
- $f_x(P) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,4) = \sqrt{y}\,\Big|_{(1,4)} = 2\,;$
- $f_y(P) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,4) = \dfrac{x}{2\sqrt{y}}\,\Big|_{(1,4)} = \frac{1}{4}$; en 6
- $f_{xy}(P) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,4) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\,\Big|_{(1,4)} = \frac{1}{4}\,.$

6. $$\int_0^1 \int_1^2 \frac{x\,\mathrm{e}^x}{y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{e}^x \cdot \Big[\ln|y|\Big]_1^2\,\mathrm{d}x = (\ln 2 - \ln 1) \cdot \int_0^1 \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x}_{v'}\,\mathrm{d}x \overset{\text{P.I.}}{=}$$

$$\ln 2 \cdot \left(\Big[\underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x}_{v} \Big]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x}_{v}\,\mathrm{d}x \right) = \ln 2 \cdot \left(1\,\mathrm{e}^1 - 0\,\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^1 + \mathrm{e}^0\right) = \ln 2\,.$$ 8

[of:] De integratievolgorde omwisselen (eerst over x, en dan over y integreren) kan natuurlijk ook.

Opmerking: dit is Stewart, 5th ed., § 15.2, 8).