

tentamen Analyse (deel 2) – wi 1 005 In, dl. 2
19 januari 2009, 09.00–11.00 uur

*Deelname aan dit tentamen is voorbehouden aan wie zich hebben opgegeven.
Zo nodig wordt je werk onbeoordeeld terzijde gelegd.*

*Alleen het formuleblad van het instellingspakket en een rekenmachine mogen worden gebruikt.
Onderling contact, communicatieapparatuur, boeken en aantekeningen zijn niet toegestaan.*

Elk antwoord dient van een deugdelijke argumentatie te worden voorzien.

Tenzij anders gevraagd worden exacte antwoorden verlangd (dus geen benaderingen).

1. Gegeven is de rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ met $a_n = \frac{2n+3}{3n+2}$.
- a) Is de rij monotoon (dus stijgend of dalend)? 3
 - b) Is de rij begrensd? 3
 - c) Heeft de rij een limiet? Zo ja, welke? 8

2. Gegeven is de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ met $a_n = (-1)^n \frac{2n+3}{3n+2}$.
- Is de reeks absoluut convergent / relatief (*conditionally*) convergent / divergent? 8

3. Gegeven is de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (x-3)^n$.
- a) Bepaal de convergentiestraal en het convergentie-interval van de reeks. 12
 - b) Laat s op het convergentie-interval de *somfunctie* van de reeks zijn, dus:

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (x-3)^n. \quad 8$$

Geef een machtreeksontwikkeling rond 3 van de afgeleide s' van deze functie.

4. Bereken $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cdot \cos x}{x^2 \cdot (e^x - 1)}$. 14

Aanwijzing: gebruik machtreeksen.

5. Gegeven is de functie $f : D \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ met $f(x, y) = \arcsin(1 - xy)$.
- a) Bepaal en teken het (maximale) domein D van f . 4
 - b) De grafiek van f vertoont symmetrie; welke? Leg uit. 2
 - c) Bepaal f_x en f_y in het punt $P = (1, \frac{1}{2})$. 10

6. Een bol $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}$ bevat een hoeveelheid gas met een dichtheid $\rho: B \rightarrow \mathbb{R}$ (in g/m³), gegeven door: $\rho(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2$.

Men is geïnteresseerd in de totale hoeveelheid M (in g) van het gas.

Leg uit dat zeker geldt dat $20 \leq M \leq 100$ (het mag nauwkeuriger).

6

Let op: het is *niet* de bedoeling dat je de massa precies uitrekent; mocht je het willen gebruiken: de inhoud van een bol met straal r bedraagt $\frac{4}{3}\pi r^3$.

7. Bereken één van de volgende twee integralen (uit § 15.3 en § 15.2):

a) ná 2007 $\int_0^1 \int_0^x \cos(x^2) \, dy \, dx;$ of

12

b) vóór 2008 $\iint_R \frac{xy^2}{x^2 + 1} \, dA$ als $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, -3 \leq y \leq 3\}$.

Normering

Elk onderdeel levert maximaal het aantal in de kantlijn vermelde punten op.

Als t het aantal toegekende punten is, en q het resultaat van quizzen en opdracht

voor deel 2, is het cijfer $c = \frac{t}{10} + q$ (afgerond, $1 \leq c \leq 10$).

10