

tentamen Analyse (deel 2) – wi 1 005 In, dl. 2

17 juni 2009, 09.00–11.00 uur

*Deelname aan dit tentamen is voorbehouden aan wie zich hebben opgegeven.*

*Zo nodig wordt je werk onbeoordeeld terzijde gelegd.*

*Alleen het formuleblad van het instellingspakket en een rekenmachine mogen worden gebruikt. Onderling contact, communicatieapparatuur, boeken en aantekeningen zijn niet toegestaan.*

*Elk antwoord dient van een deugdelijke argumentatie te worden voorzien.*

*Tenzij anders gevraagd worden exacte antwoorden verlangd (dus geen benaderingen).*

1. Bereken met de regel van De l'Hospital of met behulp van machttreesen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2 \cos x}. \quad 10$$

2. We zoeken een benadering voor oplossingen van de vergelijking  $e^x = 2 \cos x$ .

- a) Toon aan dat deze vergelijking een positieve oplossing bezit. 2  
Heeft de vergelijking nog meer oplossingen?
- b) Van welke functie zijn de nulpunten oplossingen van de gegeven vergelijking? 2
- c) Leg zowel grafisch als in formulevorm (als iteratief proces) uit hoe je met behulp van de methode van Newton-Raphson (§ 4.8) nulpunten van deze functie (oplossingen van de vergelijking) kunt benaderen. 6
- d) Kies een geschikte startwaarde  $x_0$  en voer ten minste drie stappen van het iteratieproces uit; geef alleen de resultaten. Schat vervolgens de einduitkomst. 2
- e) Waarop moet je letten bij de keuze van de startwaarde, en wat gebeurt er als je de startwaarde „ongelukkig” kiest? Rekenen hoeft niet. 2

3. Gegeven is de rij  $(a_n)_{n=2}^{\infty}$  met  $a_n = \frac{\cos \frac{1}{n}}{n}$  ( $n > 1$ ). *Bewijs steeds je gelijk.*

- a) Is de rij monotoon (dus stijgend of dalend)? 6
- b) Is de rij begrensd? 4
- c) Heeft de rij een limiet? Zo ja, welke? 4

4. Gegeven is de reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  met  $a_n = (-1)^n \frac{n^2}{n^3 + n}$  ( $n \geq 1$ ).

Is de reeks absoluut convergent / relatief (*conditionally*) convergent / divergent? 10

5. Gegeven is de reeks  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} (x+5)^n$ . 12

Bepaal de convergentiestraal en het convergentie-interval van deze reeks.

6. Gegeven is de functie  $f : D \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  met  $f(x, y) = \arcsin(x + y)$ .

a) Bepaal en teken het (maximale) domein  $D$  van  $f$ . 4

b) Geef in je tekening aan waar geldt dat  $f(x, y) = 0$ ,  
en tevens waar  $f$  maximaal en waar zij minimaal is. 4

c) Bepaal  $f_x$  en  $f_y$  in het punt  $P = (1, -\frac{1}{2})$ . 10

7. Bereken één van de volgende twee integralen (à la § 15.3 en § 15.2):

a) ná 2007  $\int_{-\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sin(x^2) dy dx$ ; of 12

b) vóór 2008  $\iint_R \sin(x+y) dA$  als  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi, -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$ .

### Normering

Elk onderdeel levert maximaal het aantal in de kantlijn vermelde punten op.

Als  $t$  het aantal toegekende punten is is het cijfer  $c = \frac{t}{10}$  ( $c \in \mathbb{N}$ ).

10