Deeltentamen Lineaire Algebra WI1105IN
23 augustus 2010, 9.00 – 11.00 uur

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands. Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en niet verboden. U dient bij berekeningen wel de tussenstappen op papier te vermelden.

---

1. Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$

Beantwoord de volgende vragen *zonder* de matrix A expliciet uit te rekenen!

a. Bereken de eigenwaarden van A en geef een basis voor elk van de eigenruimten.

b. Ga na of de vector $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ een eigenvector is van A.

c. Ga na of A inverteerbaar is. Zo ja, hoe ziet A^{-1} eruit?

2. In deze opgave worden ook de complexe eigenwaarden en -vectoren gevraagd!

a. Bereken eigenwaarden van de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

b. Geef voor elke eigenwaarde een basis van de bijbehorende eigenruimte.

3. Geef van de volgende twee beweringen aan of ze waar of onwaar zijn (uiteraard met een *duidelijk* argument).

a. Elke bovendriehoeksmatrix is diagonaliseerbaar.

b. Als A een reële matrix is met $A^3 = 0$, dan heeft A als enige (reële of complexe) eigenwaarde 0.

4. Gegeven zijn matrix $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ en vector $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a. Geef een orthogonale basis voor de kolomruimte W van A.
Kijk voor je gaat rekenen even of je gebruik kunt maken van de eenvoudige vorm van A.

b. Geef een basis voor het orthogonale complement $W^{\perp}$ van $\operatorname{Col} A$.

c. Bereken de afstand van $\mathbf{y}$ tot W.

5. **a.** Toon aan: als $\mathbf{x}$ een eigenvector is bij een positieve eigenwaarde van de symmetrische matrix A, en Q is de kwadratische vorm met matrix A, dan is $Q(\mathbf{x}) > 0$.

Stel nu dat de kwadratische vorm Q op de $\mathbb{R}^3$ is gegeven door de formule

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_3 + 8x_2x_3.$$

b. Geef de matrix A die bij Q hoort.

c. Deze matrix A heeft de eigenwaarden 9, 3 en -3. Hoe kun je dit gegeven gebruiken om een vector $\mathbf{x}$ te vinden waarvoor $Q(\mathbf{x}) < 0$?

d. Bereken een vector $\mathbf{x}$ waarvoor $Q(\mathbf{x}) < 0$.