

Verzameling van puzzels
ter ere van
de 80ste verjaardag van
Prof. Dr. J.M. Aarts



Inhoudsopgave

Puzzel LXI - MAgisCH	4
Puzzel LX - Ruim je blokken toch op, jongen	5
Puzzel LIX - Vrijdag de dertiende	6
Puzzel LVIII - Eieren met een etagegetal	7
Puzzel LVI - De puzzel van Willem van der Poel	8
Puzzel LV - Voor de variatie weer eens een sangaku	9
Puzzel LI - Oliebollen eten	10
Puzzel XLVIII - Gewichtige zaken	11
Puzzel XLVI - Lege vaten klinken het hardst	12
Puzzel XXXXII - Denkend aan Pythagoras	13

14 *Oplossing Puzzel XXXXII - Denkend aan Pythagoras*
15 *Oplossing Puzzel XLVI - Lege vaten klinken het hardst*
16 *Oplossing Puzzel XLVIII - Gewichtige zaken*
17 *Oplossing Puzzel LI - Oliebollen eten*
18 *Oplossing Puzzel LV - Voor de variatie weer eens een sangaku*
19 *Oplossing Puzzel LVI - De puzzel van Willem van der Poel*
20 *Oplossing Puzzel LVIII - Eieren met een etagegetal*
21 *Oplossing Puzzel LIX - Vrijdag de dertiende*
22 *Oplossing Puzzel LX - Ruim je blokken toch op, jongen*
23 *Oplossing Puzzel LXI - MAqisCH*



Voorwoord

In 1995 werd Prof. Dr. J. M. Aarts verkozen tot Erelid der W.I.S.V. 'Christiaan Huygens'. Dit Erelidmaatschap had hij niet alleen te danken aan zijn grote inzet voor zowel de faculteit als haar studenten, maar ook aan zijn betrokkenheid bij studenten en de studievereniging.

Na het overleden van prof. Duparc was hij de drijvende kracht achter de herdenkingsbijeenkomst van de TU Delft, W.I.S.V. 'Christiaan Huygens' en de Mijnbouwkundige Vereeniging. Ook heeft hij toen de traditie van het maken van puzzels voor het MaCHazine voortgezet. Op 8 maart 2007 is Prof. Dr. J. M. Aarts verkozen tot Erevoorzitter der W.I.S.V. 'Christiaan Huygens', een rol die hij tot op de dag van vandaag nog vol enthousiasme en toewijding vervult.

Dit boekje dient als een verzameling van de puzzels die Prof. Dr. J. M. Aarts voor het MaCHazine van de vereniging gemaakt heeft.

Met een luid 'Hugyse!' feliciteer ik namens het Bestuur der W.I.S.V. 'Christiaan Huygens' Prof. Dr. J. M. Aarts met zijn 80ste verjaardag. Moge er nog vele gezonde jaren volgen!

Daphne van Tetering

Secretaris der Bestuur 61

der W.I.S.V. 'Christiaan Huygens'

Puzzel LXI - MAgisCH

Een magisch vierkant van negen bij negen is een matrix van negen rijen en negen kolommen waarbij in iedere rij en in iedere kolom de cijfers één tot en met negen precies één keer voorkomen. Deze magische vierkanten zijn de basis voor de sudoku-puzzels; bij de sudoku-puzzel is er nog de eis dat in ieder van de negen kleinere varianten van drie bij drie de som der cijfers ook 55 is.

Deze puzzel is geïnspireerd op de K-doku; zo'n puzzel staat iedere zaterdag in de Volkskrant. Hierbij is de matrix in deelfiguren verdeeld en bij elke deelfiguur staat een uitkomst van de genoemde rekenkundige bewerking die wordt toegepast op de getallen in de deelfiguur.

$\times 10$		$+17$	$+10$		
$:3$	$+9$				$+10$
		$\times 10$	$+5$		
$+10$					$+10$
$:3$	-2	$\times 5$		$\times 20$	
		$+10$			



Puzzel LX - Ruim je blokken toch op, jongen

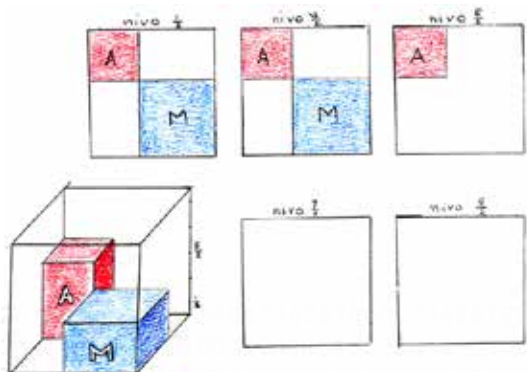
Chrisje heeft bij de bestuurswisseling een blokkendoosje gekregen. Het is een zogenaamd *Aanvullend 2 x 3 doosje*. Het doosje heeft de binnenmaten $5 \times 5 \times 5$ en daarin zitten acht blokken. Het zijn

- drie blokken van $2 \times 2 \times 3$ met de letters A, B, en C,
- drie blokken van $2 \times 3 \times 3$ met de letters K, L, en M,
- één blok van $2 \times 2 \times 2$ met de letter T,
- één blok van $3 \times 3 \times 3$ met de letter D.

Chrisje moet de blokjes weer netjes in het doosje doen. Je kunt hem daarbij helpen. Hoe vul je het doosje met de blokken?

De oplossing kun je aangeven door enkele doorsneden van het doosje gevuld met blokken te tekenen. De blokken hebben letters dus je kunt goed aangeven welk deel van de figuur van welk blok is. Ik kan beginnen met vijf vierkanten 5×5 te tekenen, corresponderend met de hoogten $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{2}$.

Ik kan nu het blokje M op de bodem van het doosje rechtsvoor plaatsen. Vanwege zijn afmetingen zie ik het dan ook op hoogte $\frac{3}{2}$. En ik kan nu het blokje A op de bodem linksachter zetten, maar vanwege de afmetingen zie ik het dan terug op de hoogten $\frac{3}{2}$ en $\frac{5}{2}$.



Puzzel LIX - Vrijdag de dertiende

De TU Delft vierde dit jaar (2012) de Dies Natalis op dinsdag 10 januari. Wat gek, toch? Normaal is de viering van de dies op een vrijdag (is al jaren zo, ik heb nooit anders meegemaakt), vrijdag 13 januari lag dus meer voor de hand. Maar vrijdag de dertiende is een ongeluksdag, zo wil het volksgeloof. Vrijdag is al niet best; denk maar aan Goede Vrijdag. En 13 is het ongeluksgetal. Dus vrijdag 13 brengt alleen maar ellende.

Vrijdag de dertiende komt wel vaker voor. Dit jaar al drie keer: in januari, april en juli. Is er ieder jaar een vrijdag de dertiende? Jazeker, en meestal wel meer dan één.

Maar, en nu komt de puzzel, *het gebeurt ook dat er een periode is van dertien opeenvolgende maanden zonder een vrijdag de dertiende in die periode. Wanneer was de laatste keer dat dat gebeurde?*





Puzzel LVIII - Eieren met een etagegetal

De TU Delft brengt binnenkort iets nieuws op de markt: eieren met een etagegetal. De productie van deze eieren is mogelijk geworden door jarenlange samenwerking van de TU Delft met de Wageningen Universiteit in een onderzoek betreffende genetische manipulatie met nanobuisjes.

De eieren zullen verkocht worden via speciale distributiecentra en zijn voorzien van een etagegetal. Hier is de definitie van een etagegetal: een ei krijgt *etagegetal* k indien het heel blijft bij een val vanaf etage i met $i < k$, maar stuk gaat bij een val vanaf etage i met $i \geq k$. Onlangs werd bij de bestuursruimte van CH een pakje met twee eieren bezorgd. Er zat een briefje bij met de mededeling: de twee eieren hebben hetzelfde etagegetal ligt tussen de 1 en de 21, inclusief de grenzen. Er was ook nog een vraag bij: kan het Bestuur van CH via experimenten bepalen wat het etagegetal is? Het EWI-gebouw heeft er de ideale afmetingen voor. Je kunt natuurlijk beginnen met het ei te laten vallen vanaf etage 1 en zo verder omhoog totdat het ei kapot valt. Dan is gelet op definitie het etagegetal k bepaald. In het meest ongunstige geval moet je dan 21 val experimenten doen. Maar in het pakje zitten twee eieren met hetzelfde etagegetal.

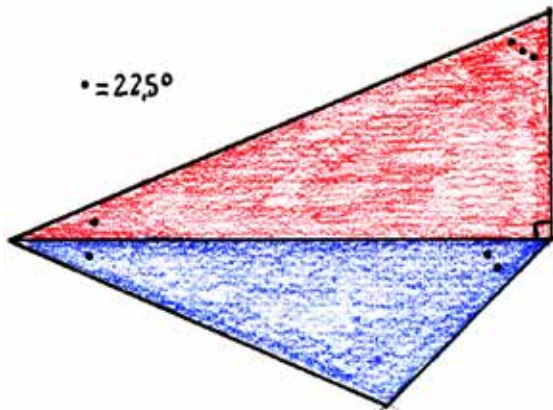
Puzzel 58: Je hebt twee eieren met eenzelfde etagegetal k , waarbij geldt: $1 \leq k \leq 21$. Hoeveel val experimenten moet je doen om met zekerheid het etagegetal vast te stellen?

Het lijkt me onnodig om te zeggen dat je een kapot ei niet meer kunt gebruiken voor een val experiment.

Puzzel LVI - De puzzel van Willem van der Poel

Professor Van der Poel gaf een, naar zijn zeggen verdraaid, leuk puzzeltje; en voorwaar niet makkelijk. Ik dacht aanvankelijk dat het te moeilijk was voor de puzzelrubriek. Maar de afgelopen weken heb ik het getest bij een representatieve steekproef. Ik moet zeggen dat ik de resultaten erg bemoedigend vond.

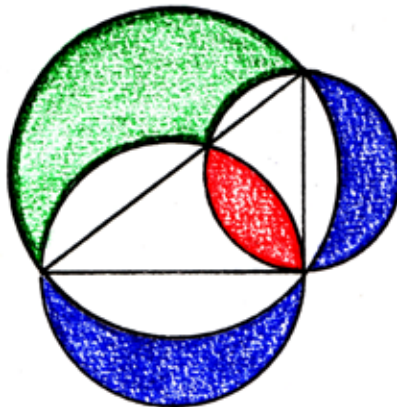
Hier is de puzzel. In de tekening zie je twee driehoeken, een rode met hoeken van 90° , 67.5° en 22.5° , en een blauwe met hoeken van 22.5° , 45° en 112.5° .



De langste zijde van de blauwe driehoek is precies even lang als de langste rechthoekszijde van de rode driehoek. Van elke driehoek heb je 4 exemplaren. Gebruik nu alle acht de driehoeken om achtereenvolgend te maken: 1) een rechthoek, 2) een driehoek, 3) twee driehoeken en 4) drie driehoeken. De oplossingen zijn niet uniek; zo kan bijvoorbeeld 3) op twee manieren gerealiseerd worden.

Puzzel LV - Voor de variatie weer eens een sangaku

Een sangaku is een tekening die een wiskundige stelling uitbeeldt. De kunst is om te ontdekken om welke uitspraak het gaat (dat is het belangrijkste) en die stelling te bewijzen (dat mag je ook nog doen). Hier is het plaatje:



Welke uitspraak is in dit plaatje uitgebeeld? Hier is nog een aanwijzing: de uitspraak heeft te maken met de bekende stelling van Pythagoras, die zegt dat in een rechthoekige driehoek het kwadraat op de schuine zijde gelijk is aan de som van de kwadraten op de rechthoekszijden.

Puzzel LI - Oliebollen eten

Beschouw de open bol met straal 1, maar zonder rand. Precies gezegd: de open bol met straal 1 en middelpunt O is de verzameling van alle punten X uit de ruimte met de eigenschap dat de afstand O tot X kleiner is dan 1: $|OX| < 1$. Daarin (in die open bol met straal 1) leg ik een configuratie van n punten met onderlinge afstand ≥ 1 . Dan is $n \leq 19$.

Wie helpt me om dit te bewijzen of te weerleggen. Ik heb een tijd geprobeerd dit probleem (vind een bovengrens voor n) aan te pakken door te kijken naar ingeschreven veelvlakken en ook de truc van Van Kan te gebruiken. Ik kwam niet verder dan ik op Oudjaar al was. Als ik zo'n configuratie van n punten heb dan kan ik ieder punt van de configuratie een bolletje met straal $\frac{1}{2}$ weg laten eten zonder dat die punten van elkaar oliebollendeel snoepen. Zo kwam ik op de 19. Wie kan dit bewijzen en/of wie kan de bovengrens naar beneden bijstellen?





Puzzel XLVIII - Gewichtige zaken

Dit is een tijd van zware beslissingen. Er komt een EPA-Bestuur aan en de kandidaten moeten gewogen worden. Hier is een kleine vingeroefening om in de stemming te komen. Er zijn zes ballen (dit is geen verwijzing naar een zaak of studentenvereniging), genummerd 1, 2, 3, 4, 5, 6. De ballen zien er verder precies hetzelfde uit. Onder deze zes ballen zijn er drie zware en drie lichte; de zware zijn even zwaar en de lichte even licht.

Om uit te vinden welke ballen zwaar en welke licht zijn heb je de beschikking over een balans. Ik kan dit probleem oplossen met vijf wegingen: bal 1 achtereenvolgens tegen 2, 3, 4, 5, 6 afwegend. Daarom geef ik dit probleem *par 5*. Ik ben ook niet dom en beseft dat je het probleem met minder wegingen kan oplossen. Er zijn oplossingen die een *birdie* zijn (4 wegingen) maar ook oplossingen die een *eagle* zijn (3 wegingen). Een oplossing dient een beschrijving van de weegprocedure te bevatten en een bewijs van de correctheid van de procedure.



Puzzel XXXXVI - Lege vaten klinken het hardst

Linda, Michiel en Tom hebben op een receptie van een bevriende vereniging een vat wijn van 24 liter achterover gedrukt. In plaats van dat samen even paraat te maken besluiten ze om het eerlijk te verdelen. In het CH-hok liggen drie lege vaten, van 13, 11 en 5 liter. De vaten hebben geen merkstrepen (dus om iets af te meten maak je een vat helemaal vol, of je laat het leeg) en andere vaten zijn er niet.

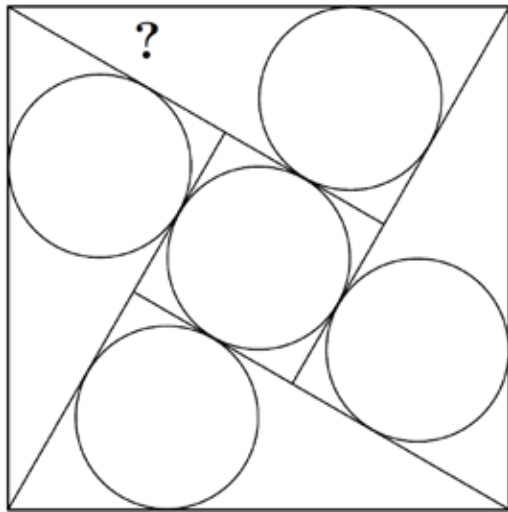
Hoe kunnen onze drie bestuurders de buit eerlijk delen, elk met 8 liter naar huis gaan en het lege vat van 5 liter laten staan?



Puzzel XXXXII - Denkend aan Pythagoras

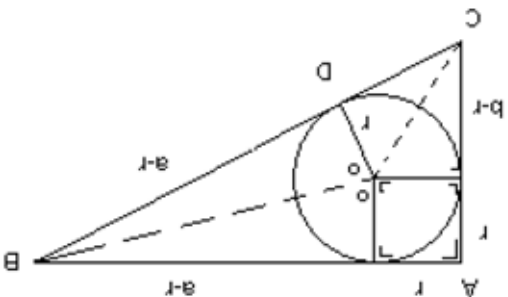
Denkend aan Pythagoras
zie ik vier kopieën van een rechthoekige driehoek
in een kraag geschikt rond een vierkant.

Als nu alle vijf cirkels even groot zijn,
hoe groot is dan de hoek linksboven?

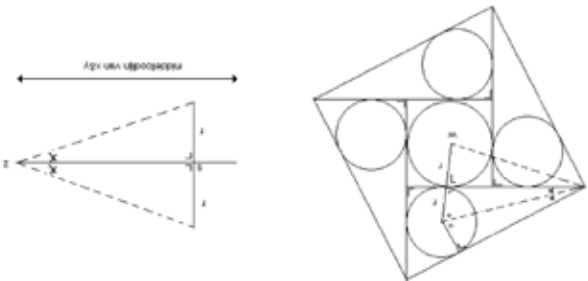


Oplossing Puzzel XXXXII - Denkend aan Pythagoras

Het betreft een ingeschreven cirkel, wat inhoudt dat het middelpunt op het snijpunt van de deellijnen ligt. Deze deelt hoek ABC in twee gelijke hoeken.



Vervolgens geldt dat de twee driehoek congruent zijn (ZZR) dus: $(D - B) = a - r$, waaruit volgt dat hoeken o gelijk zijn.



Dus de afstand van $z - x = z - y$. Wederom hebben we twee congruente driehoeken (ZZR) dus zijn hoek ZYs en hoek XZs gelijk. We weten dat w in het midden ligt dus geldt $3a = 45^\circ$, dus $a = 15^\circ$. De conclusie is dus dat de gezochte hoek 30° is.

Oplossing Puzzel XLVI - Lege vaten klinken het hardst

We gebruiken drie keer dat: $13 - 5 = 8$.

1. Gooi het 13-liter vat vol met wijn uit het 24-liter vat.
2. Gooi het 5-liter vat vol met wijn uit het 13-liter vat.
3. Gooi het 5-liter vat weer leeg in het 24-liter vat.
4. Gooi het 13-liter vat leeg in het 11-liter (want het 13-liter vat hebben we nog nodig).

Linda kan nu met het 11-liter vat naar huis. Herhaal nu stap 1, 2 en 3. Michiel en Tom kunnen hun vaatje nu ook onder de snelbinders doen.



Oplossing Puzzel XLVIII - Gewichtige zaken

De ballen zijn genummerd 1 t/m 6, weeg bal 1 tegen bal 2 en bal 1 tegen bal 3.

1. Als hieruit volgt dat de ballen 1, 2 en 3 even zwaar zijn, doe dan als derde weging bal 1 tegen bal 4 om uit te vinden welke groep de zware en welke de lichte is.

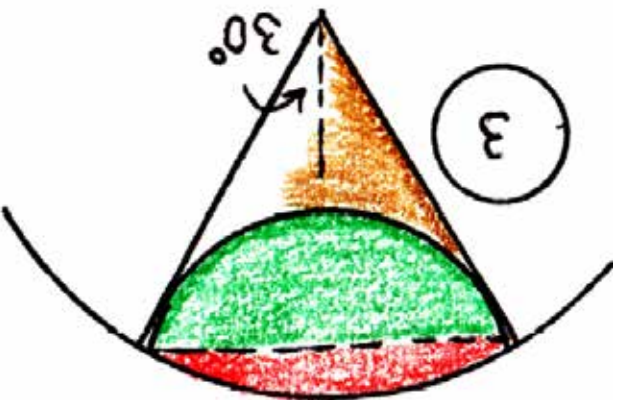
2. Anders hebben we twee ballen in één groep en één bal in de andere groep, en weten we welke groep de zware en welke de lichte is. Doe nu als laatste weging bal 4 tegen bal 5.

2.1 Als de balans gelijk blijft weten we dat bal 4 en bal 5 in de groep met de enkele bal horen en bal 6 in de andere groep. Dan zijn we klaar.
2.2. Zo niet, dan weten we van bal 4 en bal 5 of ze licht dan wel zwaar zijn en weten we bij welke groepen we ze moeten indelen. Voor de laatste bal is het dan direct helder bij welke club hij hoort.



Oplossing Puzzel LI - Olivebollen eten

In plaats van hapjes die opgebouwd zijn uit twee bolkapjes, zouden er ook ijsco-vormige hapjes genomen kunnen worden. Ijsco's hebben een halve tophoek van 30° , zoals te zien in figuur 3.



Zo'n ijsco heeft een volume gelijk aan:

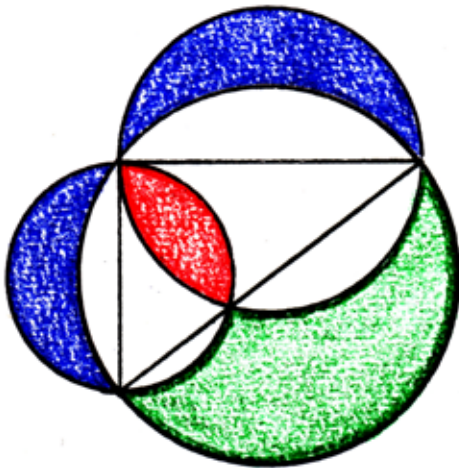
$$\int_0^1 \int_{\pi/6}^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/6} r^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \, dr = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

en twee punten binnen de ijsco's hebben een onderlinge afstand ≤ 1 . Omdat de inhoud van de bol gelijk is aan $4/3\pi$ kunnen er maximaal 14 niet-overlappende ijsco's gegeten worden. Op deze manier vind ik $n \leq$

14.

Oplossing Puzzel LV - Voor de variatie weer eens een sangaku

De oppervlakte van het groene maantje is gelijk aan de som van de oppervlakten van het rode lensje en de twee blauwe maantjes.



In de figuur zie je een rechthoekige driehoek; de rechthoekszijden noem ik a en b, en de schuine zijde noem ik c. De cirkelschijven met die zijden tot middellijn noem achtereenvolgend D_a , D_b , D_c ; de maantjes die erbij horen noem ik opeenvolgend M_a , M_b (beide blauw), M_c (groen) en het rode lensje noem ik L. Een direct gevolg van de Stelling van Pythagoras is $\mu(D_a) + \mu(D_b) = \mu(D_c)$. Hierbij duidt, bijvoorbeeld, $\mu(D_c)$, de oppervlakte aan van de schijf D_c .

De letter μ gebruik ik om op de oppervlakte aan te duiden. Nu is $\mu(D_a) + \mu(D_b) = \mu(D_a \cup D_b) + \mu(L)$ en dus $\mu(D_c) = \mu(D_a \cup D_b) + \mu(L)$. Door nu aan beide kanten één keer alle wit en rood weg te halen komt er $\mu(M_c) = \mu(M_a) + \mu(M_b) + \mu(L)$, hetgeen te bewijzen was.

Oplossing Puzzel LVI - De Puzzel van Willem van der Poel

Het leuke van de puzzel is het ineens-zien-van-de-oplossing, het in een flits zien hoe de puzzel in elkaar zit. Voor de lezer die de opwinding wil ondergaan is het uitknippen van de stukjes om de puzzel zo op te lossen een goede tip.

Oplossing Puzzel LVIII - Eieren met een etagegetal

Hier volgt een procesbeschrijving:

1. Laat het ei vallen van verdieping 6. Als het breekt, laat het tweede ei achtereenvolgens vallen vanaf verdieping 1, 2, ..., 5.
 2. Laat het ei vallen van verdieping 11. Als het breekt, laat het tweede ei vallen van verdieping 15. Als het breekt, laat het tweede ei achtereenvolgens vallen vanaf verdieping 7, 8, ..., 10.
 3. Laat het ei vallen van verdieping 15. Als het breekt, laat het tweede ei vallen van verdieping 12, 13, ..., 14.
 4. Laat het ei vallen van verdieping 18. Als het ei breekt, laat het tweede ei vallen vanaf verdieping 16 en 17.
 5. Laat het ei vallen van verdieping 20. Als het ei breekt, laat het tweede ei vervolgens vallen vanaf verdieping 19.
 6. Laat het ei vallen vanaf verdieping 21. Als het breekt is het etagegetal 21 met zekerheid vastgesteld en heb je nog één ei over.
- Met dit proces is het aantal malen dat je een val experiment moet doen op verdieping 5 komen en doorredenerend in hetzelfde schema kom je niet op de 21ste verdieping. Deze oplossing is ook generiek te maken.



Oplossing Puzzel LIX - Vrijdag de dertiende

De laatste periode van 13 opeenvolgende maanden zonder een vrijdag de dertiende is: 13 juli 2001 tot 13 september 2002. Hoe zie ik dat zo snel? Wel, dit jaar hebben we al drie vrijdagen de dertiende gehad, in januari, april en juli. Kijk nu in je agenda, dat vind je dat je tot volgend jaar september moet wachten op een vrijdag de dertiende. Van 13 juli 2012 tot 13 september 2013 is een periode van 13 maanden! Dit is natuurlijk nog niet de oplossing.

Ga nu 11 jaar terug, dan schuiven de dagen waarop een dertiende van de maand valt elk jaar met 1 dag van de week terug,, want het aantal dagen in een jaar is 365, dat is 52 volle weken plus 1 dag. Als je in 11 jaar teruggaat, dan schuif je dus 11 dagen van de week terug. Maar in die periode zijn er ook nog schrikkeljaren 2004, 2008, 2012 en in die jaren moet je nog een extra dag terug, in het totaal dus 14 dagen. Dat is twee volle weken. Daarom verandert er aan de dagen van de week niets. Zo vind je de laatste periode van 13 maanden zonder vrijdag de dertiende. De rol van het schrikkeljaar 2012 in de bovenstaande redenering is heel subtiel. Ga maar na: in 2001 vind ik zaterdag 13 januari (en niet vrijdag 13), vrijdag 13 april en vrijdag 13 juli. Dat komt omdat die schrikkel dag in februari zit, net tussen januari en april. Er zijn nogal wat misverstanden over tellingen met de kalender. Zo is de kalender niet periodiek met een periode van 28 jaar. Dat is wel goed in het blok van 1901 tot 2099. Dat komt omdat 2000 wel een schrikkeljaar was, maar 1900 en 2100 het niet zijn. De kalender is wel periodiek met een periode van 400 jaar. De kalender van dit jaar is dus gelijk aan die van het jaar 1612. Zo kun je snel de dag van de week vinden bij gebeurtenissen uit onze 80-jarige oorlog!

Oplossing Puzzel LX - Ruim je blokken toch op, jongen

De puzzel was gebaseerd op een meetkundige illustratie van het merkwaardige product

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Ik heb het bewijs dat Christiaan Huygens gegeven heeft van deze formule als uitgangspunt genomen. Alleen had ik aan het bewijs van Huygens iets gewijzigd om de opgave te moeilijker te maken. Dat is helaas niet gelukt.

Ik zal niet vertellen hoe de oplossingen precies in elkaar zitten. Met hetgeen wat ik hierboven gezegd heb, kan ieder snel een goede oplossing vinden.



Oplossing Puzzel LXI - Magisch

We kunnen er veel woorden aan vuil maken, maar de oplossing spreekt voor zich.

5 $\times 10$	2	4 $+ 17$	6 $+ 10$	3	1
1 $+ 10$	5 $+ 9$	3	2	6 $+ 10$	4 $+ 10$
3 $+ 3$	1	4	5 $\times 10$	1 $+ 5$	2
3	4	6	2	3	5 $+ 10$
6 $: 3$	3 $- 2$	1 $\times 5$	5	4 $\times 20$	2
2	1 $+ 10$	6 $+ 10$	4	3	5



Oplossingen van de
verzameling van puzzels
ter ere van
de 80ste verjaardag van
Prof. Dr. J.M. Aarts